Mustafa Özdemir

25.12.2003

Diferansiyel Denklemler 1 İkinci Arasınav Soruları

1. Kutupsal koordinatlarda verilen $r = C\,(1 + \cos\theta)$ kardiyoid ailesinin dik yörüngelerinin denklemini bulunuz.

2. $y' = e^x y^2 - 3y + e^{-x}$ diferansiyel denkleminin bir özel çözümü $y_1 = e^{-x}$ ise denklemin genel çözümünü bulunuz.

3. $e^{y - y'x} = (y')^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

4. $3x^5 dx - y\left(y^2 - x^3\right) dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

5. $y' \cos y - \sin y = \cos x \sin^2 y$ diferansiyel denklemini çözünüz.

6. $y' = \tan(x + y)$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Sadece 5 soru cevaplayınız. Her soru 20 puandır.
Süre : 90 dakika
Başarılar

25.12.2003

Diferansiyel Denklemler 1 İkinci Arasınav Sorularının Çözümleri

1. Kutupsal koordinatlarda verilen $r = C\,(1+\cos\theta)$ **kardiyoid ailesinin dik yörüngelerinin denklemini bulunuz.**

Çözüm : Önce $r = C\,(1+\cos\theta)$ kardiyoid ailesinin diferansiyel denklemini bulalım. Türev alırsak $r' = -C\sin\theta$ olur. $r = C\,(1+\cos\theta)$ ve $r' = -C\sin\theta$ denklemlerinden C yi yok edersek,

$$r' = \frac{-r\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

buluruz. Kutupsal koordinatlarda dik yörüngelerin denklemi r' yerine $\dfrac{-r^2}{r'}$ yazılarak elde edilebilir.

O halde $\dfrac{r}{r'} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ olur. $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$ yazıp düzenlersek,

$$\frac{dr}{r} = \frac{(1+\cos\theta)\,d\theta}{\sin\theta}$$

olur. Sağ tarafın pay ve paydasını $(1-\cos\theta)$ ile çarparsak Denklem

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta$$
$$\ln r = \ln(1-\cos\theta) + \ln C$$
$$r = C\,(1-\cos\theta)$$

bulunur.

2. $y' = e^x y^2 - 3y + e^{-x}$ **diferansiyel denkleminin bir özel çözümü** $y_1 = e^{-x}$ **ise denklemin genel çözümünü bulunuz.**

Çözüm 2: $y = y_1 + \dfrac{1}{v}$ dönüşümünu denkleme uygulayalım.

$y = e^{-x} + \dfrac{1}{v}$, $y' = -e^{-x} - \dfrac{v'}{v^2}$ ifadelerini denklemde yerine yazarsak,

$$-e^{-x} - \frac{v'}{v^2} = e^x\left(e^{-2x} + \frac{2e^{-x}}{v} + \frac{1}{v^2}\right) - 3e^{-x} - \frac{3}{v} + e^{-x}$$

Denklemi düzenleyip her tarafı v^2 ile çarparsak,

$$-v' = -v + e^x$$
$$v' - v = -e^x$$

lineer diferansiyel denklemi bulunur.

$$v = e^{-\int(-1)dx}\left(\int(-e^x)\,e^{\int(-1)dx}dx + c\right)$$
$$v = e^x(-x+c)$$

bulunur. Bu ifadeyi $y = e^{-x} + \dfrac{1}{v}$ denkleminde yerine yazarsak,

$$y = e^{-x} + \frac{1}{e^x(-x+c)}$$

bulunur.
3. $e^{y-y'x} = (y')^2$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm : Her iki tarafın $\ln' ini$ alırsak.

$$y - y'x = 2\ln y'$$

olur. $y' = p$ diyelim.Böylece
$y - px = 2\ln p$ yada $y = px + 2\ln p$ $(*)$ Clairaut diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin türevini alırsak

$$y' = p = p + xp' + 2\frac{p'}{p}$$
$$p'\left(x + \frac{2}{p}\right) = 0$$

denklemi elde edilir.
$i)$ $p' = 0$ ise $p = C$ olur. Bunu $(*)$ denkleminde yerine yazarsak $y = Cx + 2\ln C$ genel çözümü bulunur.
$ii)$ $x = -\dfrac{2}{p}$ ise bunu $(*)$ denkleminde yerine yazalım. $y = -2 + 2\ln p$ olur. $x = -\dfrac{2}{p}$ ve $y = -2 + 2\ln p$ denlemlerinden p yok edilerek $y = -2 + \ln\dfrac{4}{x^2}$ ya da $4 - x^2e^{y+2} = 0$ tekil çözümü bulunur

4. $3x^5dx - y\left(y^2 - x^3\right)dy = 0$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm : $x^3 = u$ ve $y^2 = v$ dönüşümünü uygulayalım.
$3x^2dx = du$, $2ydy = dv$ ifadelerini de göz önüne alarak denklemimiz

$$udu - \frac{1}{2}(v-u)\,dv = 0$$

homojen diferensiyel denklemine dönüştürülür. Her tarafı u ile bölelim

$$du - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{u} - 1\right)dv = 0$$

ve $\dfrac{v}{u} = w$ dönüşümü yapalım.

$$v = uw \text{ ise } dv = wdu + udw$$

ifadelerini yerine yazarak

$$du - \frac{1}{2}(w-1)(wdu + udw) = 0$$

Buradan

$$\begin{aligned}\left(2 + w - w^2\right) du &= u(w-1)\, dw \\ \frac{du}{u} &= \frac{1-w}{w^2 - w - 2} dw \\ \frac{1-w}{w^2-w-2} &= \frac{A = -1/3}{w-2} + \frac{B = -2/3}{w+1}\end{aligned}$$

olduğu gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}\ln u &= \frac{-1}{3}\left(\ln (w-2)(w+1)^2\right) + \ln C \\ u &= (w-2)^{-1/3}(w+1)^{-2/3} C\end{aligned}$$

$u = x^3$ ve $w = \dfrac{v}{u} = \dfrac{y^2}{x^3}$ ifadeleri yerine yazılarak

$$C = \left(y^2 - 2x^3\right)\left(y^2 + x^2\right)^2$$

genel çözümü bulunur.
5. $y' \cos y - \sin y = \cos x \sin^2 y$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm : $\sin y = u$ dönüşümü ile denklemimiz

$$u' - u = u^2 \cos x$$

olur. Her iki tarafı u^2 ile bölersek

$$u^{-2}u' - u^{-1} = \cos x$$

Bernoulli diferensiyel denklemi elde edilir. $u^{-1} = v$ dönüşümü ile $-u^{-2}u' = v'$ olduğundan denklemimiz

$$v' + v = -\cos x$$

lineer diferensiyel denklemine dönüşür. Böylece

$$v = e^{-x}\left(\int (-\cos x)\, e^x dx + c\right) = e^{-x}\left(-\int \cos x e^x dx + c\right)$$

olur. Kısmi integrasyon hesabı ile

$$\int \cos x e^x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

elde edilir. Sol taraftaki $\int \cos x e^x dx$ ifadesini eşitliğin sol tarafına geçirip her iki tarafı 2 ile bölerek

$$\int \cos x e^{x} dx = \frac{1}{2}\left(e^{x}\cos x + e^{x}\sin x\right)$$

bulunur. Böylece

$$v = e^{-x}\left(-\frac{1}{2}\left(e^{x}\cos x + e^{x}\sin x\right) + c\right)$$

$v = (\sin y)^{-1}$ ifadesini yerine yazıp düzenlersek,

$$2\text{cosec}y + \sin x + \cos x = ce^{-x}$$

genel çözümü bulunur.
6. $y' = \tan(x+y)$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm: $x + y = u$, $1 + \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}$ dönüşümü ile denklemimiz

$$\frac{du}{dx} - 1 = \tan u$$

olur. Buradan

$$\frac{du}{\tan u + 1} = dx$$

ve

$$x + c = \int \frac{du}{\tan u + 1}$$

bulunur bulunur.Sağ tarafın integrali

$$\tan u = v \ , \ \left(1 + \tan^{2} u\right) du = dv$$

dönüşümü ile

$$\int \frac{du}{\tan u + 1} = \int \frac{dv}{(v+1)\left(v^{2}+1\right)}$$

olur.

$$\frac{A}{v+1} + \frac{Bv + C}{v^{2}+1} = \frac{1}{(v+1)\left(v^{2}+1\right)}$$

ifadesinden $A = 1/2$, $B = -1/2$ ve $C = 1/2$ bulunur. Böylece,

$$x + c = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v+1} - \frac{1}{2}\int \frac{v-1}{v^{2}+1}dv = \frac{1}{2}\ln(v+1) - \frac{1}{4}\int \frac{2vdv}{v^{2}+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^{2}+1}$$

$$x + c = \frac{1}{2}\ln(v+1) - \frac{1}{4}\ln\left(v^{2}+1\right) + \frac{1}{2}\arctan v$$

ve $v = \tan(x+y)$ ifadesini yerine yazarak

$$x + c = \frac{1}{2}\ln(\tan(x+y) + 1) - \frac{1}{4}\ln\left(\tan^{2}(x+y) + 1\right) + \frac{1}{2}\arctan(\tan(x+y))$$

genel çözümü bulunur.