

---

# GEOMETRİ

---

## 1 Üçgenler

### Gösterimler:

Bir  $ABC$  üçgeni için aşağıdaki gösterimleri kullanacağız:

Kenar uzunlukları:  $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$

Açılar:  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  (Trigonometrik ifadelerde açı işareti kullanılmayacak.)

Ağırlık merkezi:  $G$ , diklik merkezi (ortosantr):  $H$ , çevrel çember merkezi:  $O$ , içteğet çember merkezi:  $I$ , dış teğet çember merkezleri:  $I_a, I_b, I_c$

Çevrel çemberin yarıçapı:  $R$ , içteğet çemberin yarıçapı:  $r$ , dışteğet yarıçapları:  $r_a, r_b, r_c$

Yarıçevre:  $u = \frac{1}{2}(a + b + c)$ , Alan:  $S$

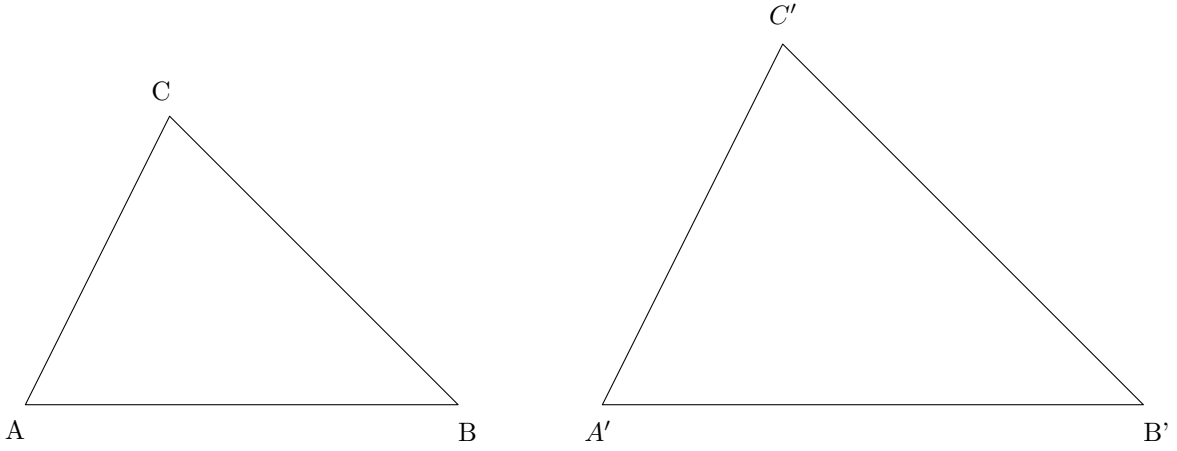
Kenarortay uzunlukları:  $v_a, v_b, v_c$

Yükseklik uzunlukları:  $h_a, h_b, h_c$

Açıortay uzunlukları:  $n_a, n_b, n_c$

### 1.1 Benzer Üçgenler

Karşılıklı açıları eş ve karşılıklı kenarları orantılı olan üçgenlere benzer üçgenler denir.



$ABC$  üçgeni  $A'B'C'$  üçgenine birbirine denk olan aşağıdaki koşullardan herhangi birisinin sağlanması durumunda benzerdir.

#### 1. Kenar-Kenar-Kenar (KKK) Özelliği

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

## 2. Kenar-Açı-Kenar (AKA) Özelliği

$$|AB| : |BC| = |A'B'| : |B'C'| \quad \text{ve} \quad m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{A'B'C'}).$$

3. Açı-Açı-Açı (AAA) Özelliği. İki açı bilindiğinde üçüncü açı zaten bilineceği için bu özellik Açı-Açı (AA) olarak da adlandırılabilir.

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{A'B'C'}) \quad \text{ve} \quad m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{B'A'C'}).$$

Benzer üçgenlerdeki karşılıklı kenarların oranına benzerlik oranı denir. Eğer bu oran 1 ise üçgenlere eş üçgenler denir. Benzer üçgenlerdeki bazı özellikler şunlardır:

1. Benzer üçgenlerin çevrelerinin oranı benzerlik oranına eşittir.
2. Benzer üçgenlerin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşittir.
3. (Tales Teoremi) Paralel doğrular kendilerini kesen doğruları aynı oranda bölerler.
4. Benzer üçgenlerdeki karşılıklı açıortayların, kenarortayların ve yüksekliklerin oranları aynıdır ve bu oran benzerlik oranına eşittir.

**Örnek:** Bir  $ABCD$  paralelkenarında  $AC$  uzun köşegen olsun.  $C$  den  $AB$  ve  $AD$  kenarlarının uzantılarına  $CE$  ve  $CF$  dikmeleri indiriliyor.

$$|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $B$  den  $AC$  ye  $BG$  dikmesini indirelim. Bu durumda  $ABG$  ve  $ACE$  benzer üçgenler olduğundan  $|AC| \cdot |AG| = |AE| \cdot |AB|$  dir. Ters açılardan,  $\widehat{GCB} = \widehat{CAF}$  olduğu için  $\triangle CBG \sim \triangle ACF$  dir. Buradan  $|AC| \cdot |CG| = |AF| \cdot |BC|$  elde ederiz. Bulduğumuz iki eşitliği toplayarak

$$|AC| \cdot (|AG| + |CG|) = |AE| \cdot |AB| + |AF| \cdot |BC|$$

olduğunu buluruz. Ayrıca  $|AG| + |CG| = |AC|$  olduğu için bu istenilen eşitliktir.

## 1.2 Temel Teoremler

Bir  $ABC$  üçgeninde kenar uzunlukları  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$  ve  $|AB| = c$  ve bu kenarları gören açılar da  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  ve  $\widehat{C}$  olsun.

1. Pisagor Teoremi:  $A$  açısı dik olan bir  $ABC$  üçgeninde  $a^2 = b^2 + c^2$  dir.

2. Sinüs Teoremi: Bir  $ABC$  üçgeninde,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

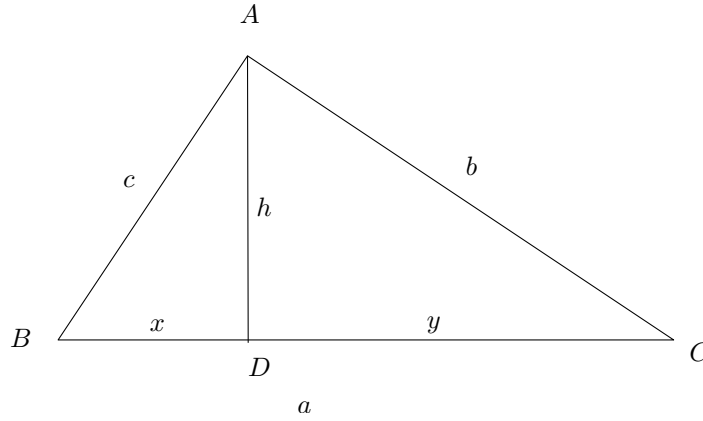
eşitliği sağlanır.

3. Kosinüs Teoremi: Bir  $ABC$  üçgeninde,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  eşitliği sağlanır.

Diğer kenarlar için de benzer eşitlikler mevcuttur.

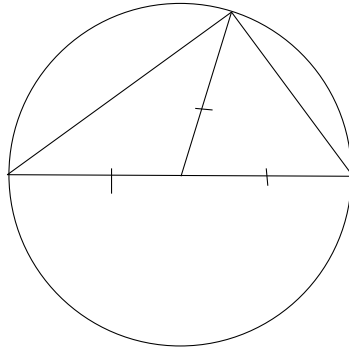
4. Öklid Bağıntısı: Bir dik üçgende dik kenarın uzunluğunun karesi, bu kenarın hipotenüs üzerine izdüşümü ile hipotenüs uzunluğunun çarpımına eşittir. Bu bağıntıdan aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$b^2 = ya, \quad c^2 = xa, \quad h^2 = xy, \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$



5. Muhteşem Üçlü: Bir dik üçgende, dik köşeden çizilen kenarortay hipotenüsün yarısıdır.

Bu uzunlukların her biri çevrel çemberin yarıçapına eşittir.



### Örnekler:

1. Tabanı  $AC$  olan bir  $ABC$  ikizkenar üçgeninde  $CD$  içaçıortayı çiziliyor.  $D$  den  $DC$  ye çizilen dik  $AC$  yi  $E$  de kesiyorsa  $|EC| = 2|AD|$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $F$ ,  $DE$  ile  $BC$  nin kesişim noktası ve  $K$ ,  $EC$  nin orta noktası olsun.  $CD$  doğru parçası  $ECF$  üçgeninde hem bir dikme hem de bir açıortay olduğundan aynı zamanda bir kenarortaydır. Yani  $|ED| = |DF|$  dir. Benzerlikten dolayı  $DK$  ile  $FC$  birbirine paraleldirler.  $EDC$  üçgeninde muhteşem üçlü özelliğini uygulayarak  $|DK| = |EK| = |KC|$  elde ederiz. Ayrıca  $ADK$  ikizkenar bir üçgen olduğundan  $|DK| = |AD|$  olduğunu ve istenilen sonucu göstermiş oluruz.

2. Taban uzunluğu  $a$  ve diğer kenarlar uzunlukları  $b$  olan ikizkenar üçgen ile taban uzunluğu  $b$  ve diğer kenar uzunlukları  $a$  olan ikizkenar üçgenin çevrel çemberleri aynı  $R$  yarıçapına sahipse,  $a \neq b$  olmak üzere  $ab = \sqrt{5}R^2$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Taban uzunluğu  $a$  olan ikizkenar üçgende tepe açısı  $\alpha$  ve taban uzunluğu  $b$  olan ikizkenar üçgende tepe açısı  $\beta$  olsun. İlk üçgende uygulanan Sinüs teoreminden dolayı

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(90^\circ - \alpha/2)} = 2R$$

olur. Buradan  $a = 2R \sin \alpha$  ve  $b = 2R \sin(90^\circ - \alpha/2) = 2R \cos(\alpha/2)$  olduğu bulunur. Benzer şekilde ikinci üçgende  $b = 2R \sin \beta$  ve  $a = 2R \cos(\beta/2)$  olur. Bu eşitlikleri kullanarak

$$a^2 = 4R^2 \cos^2(\beta/2) = 4R^2(1 - \sin^2(\beta/2)) = 4R^2 \left(1 - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

ve

$$b^2 = 4R^2 \cos^2(\alpha/2) = 4R^2(1 - \sin^2(\alpha/2)) = 4R^2 \left(1 - \frac{a^2}{4b^2}\right)$$

elde ederiz. Bu iki eşitliğin farkını alırsak

$$a^2 - b^2 = 4R^2 \left[ \frac{a^2}{4b^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = R^2 \frac{a^4 - b^4}{a^2b^2} = R^2 \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{a^2b^2}$$

olur. Buradan,  $a \neq b$  olduğu için  $R^2(a^2 + b^2) = a^2b^2$  elde ederiz. Yukarıda bulduğumuz eşitliklerden birincisini  $4a^2$  ve ikincisini  $4b^2$  çarparak farklarını alırsak

$$4(a^4 - b^4) = 16R^2(a^2 - b^2) + 4R^2(a^2 - b^2)$$

ve her iki tarafı  $4(a^2 - b^2)$  ile bölerek  $a^2 + b^2 = 5R^2$  olduğunu buluruz. Ayrıca  $R^2(a^2 + b^2) = a^2b^2$  olduğunu bildiğimizden istenen sonunu göstermiş oluruz.

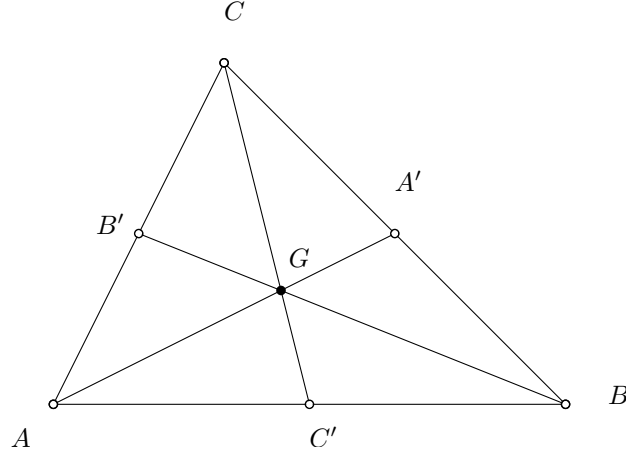
### 1.3 Özel Noktalar

Bu bölümde bir  $ABC$  üçgeninde bazı özel noktalardan ve ilgili özelliklerden bahsedeceğiz.

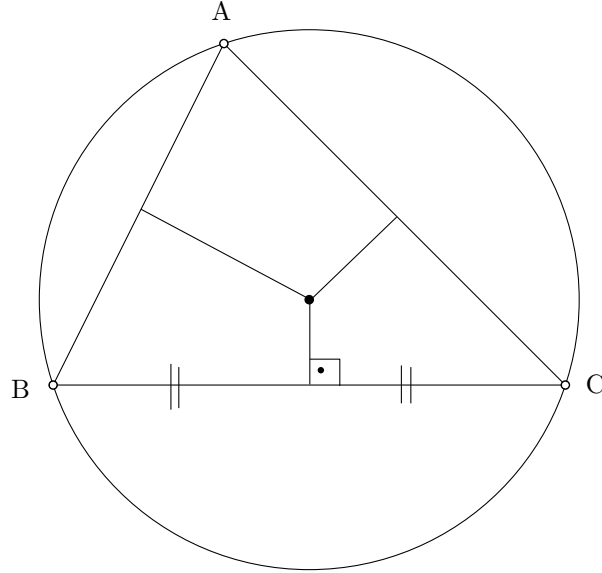
**Ağırlık merkezi.** Kenarortaylar bir  $G$  noktasında kesişirler. Bu noktaya ağırlık merkezi denir. Kenarortaylar birbirlerini  $2 : 1$  oranında bölerler. Yani, eğer  $AA', BB', CC'$  kenarortaylar ise

$$\frac{|AG|}{|GA'|} = \frac{|BG|}{|GB'|} = \frac{|CG|}{|GC'|} = \frac{2}{1}$$

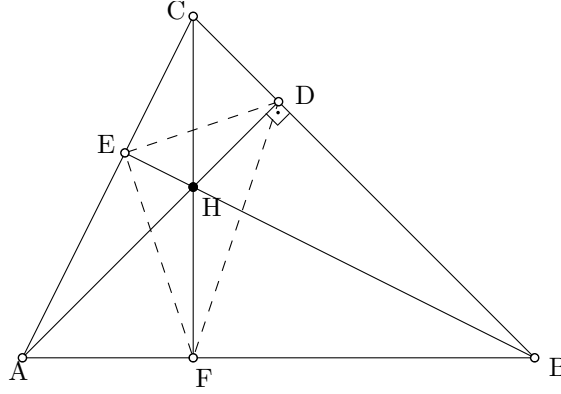
eşitlikleri sağlanır. Ayrıca kenarortaylar üçgeni alanları birbirine eşit olan 6 üçgene böler.



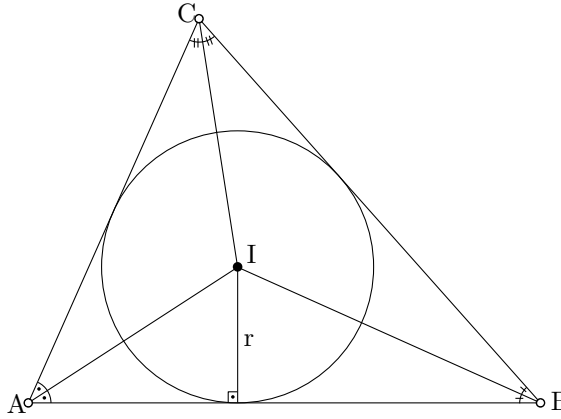
**Çevrel çember merkezi.** Kenarların orta noktalarından çıkılan dikmeler bir  $O$  noktasında kesişirler. Bu nokta üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.



**Diklik merkezi.** Köşelerden karşı kenarlara indirilen  $AD, BE$  ve  $CF$  dikmeler bir  $H$  noktasında kesişirler. Bu noktaya diklik merkezi ve  $D, E$  ve  $F$  noktalarına da dikme ayakları denir. Ayrıca  $\triangle DEF$  ye  $\triangle ABC$  nin ortik üçgeni denir.



**İç merkez (İçteğet çember merkezi).** Açortaylar bir  $I$  noktasında kesişirler. Bu nokta üçgenin iç merkezidir.



**Örnekler:**

1. Bir  $ABC$  üçgeninin diklik merkezi  $H$  ve çevrel çember yarıçapı  $R$  olmak üzere

$$|AH|^2 + |BC|^2 = 4R^2 \quad \text{ve} \quad |AH| = |BC| |\cot A|$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Üçgeninin köşelerden karşı kenarlara paralel çizilen doğruların kesişmesiyle oluşan üçgeni  $A_1B_1C_1$  ile gösterelim. Bu üçgenin kenar orta noktaları  $A, B, C$  olur. Dolayısıyla  $H$ ,  $A_1B_1C_1$  üçgeninin çevrel çember merkezi olur. Ayrıca bu çevrel

çemberin yarıçapı da  $2R$  olur. Buradan

$$4R^2 = |B_1H|^2 = |B_1A|^2 + |AH|^2 = |BC|^2 + |AH|^2$$

elde ederiz. Sinüs teoremini kullanarak ta

$$|AH|^2 = 4R^2 - |BC|^2 = \left( \frac{1}{\sin^2 A} - 1 \right) |BC|^2 = (|BC| \cot A)^2$$

elde ederiz.

2. Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninde diklik merkezi  $H$  ve dikme ayakları  $D, E, F$  olsun.  $DEF$  üçgeninin iç merkezinin  $H$  olduğunu gösteriniz.

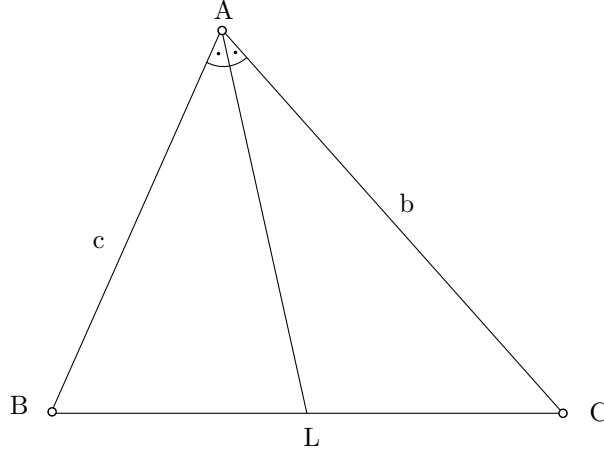
**Çözüm:**  $DCEH$  kirişler dörtgeninde  $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$  dir. Benzer şekilde  $DHFB$  kirişler dörtgeninde  $\widehat{HDF} = \widehat{HBF}$  dir. Ayrıca  $\widehat{HCE} = \widehat{ACF} = 90^\circ - \widehat{BAC}$  ve  $\widehat{HBF} = \widehat{EBA} = 90^\circ - \widehat{BAC}$  olduğundan  $\widehat{HDE} = \widehat{HDF}$  olur. Dolayısıyla  $DEF$  üçgeninde  $DH$ ,  $D$  köşesinin açıortaydır. Benzer şekilde diğer köşeler için  $EH$  ve  $FH$  nin açıortaylar olduğunu ve açıortayların kesişiminin  $H$  olduğunu buluruz.

#### 1.4 Özel doğrular

**Açıortay teoremi.** Her açıortay karşı kenarı komşu kenarların oranında böler. Örneğin,  $AL$ ,  $A$  açısından çizilen açıortay ise

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{c}{b}$$

eşitliği sağlanır.



**Stewart teoremi.**  $D$ ,  $[BC]$  doğru parçası üzerinde bir nokta olmak üzere  $|AD| = d$ ,  $|BD| =$

$m \mid CD = n$  ise

$$b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$$

eşitliği sağlar.

**Kenarortay teoremi.**  $A$  köşesinden çizilen kenarortayın uzunluğu  $v_a$  ise

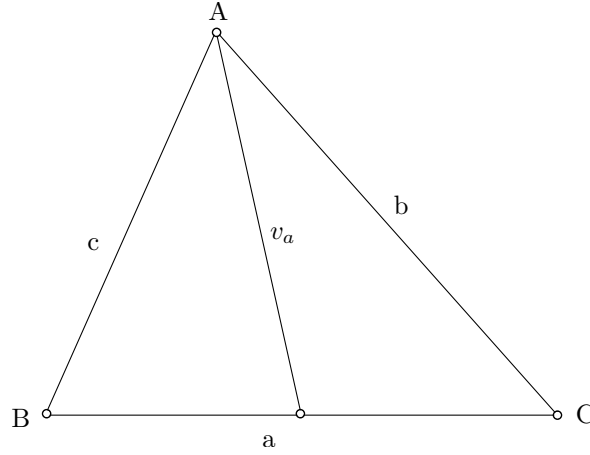
$$2v_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

bağıntısı geçerlidir. Diğer kenarortaylar için de benzer bağıntılar geçerlidir.

Ayrıca, bu bağıntılar taraf tarafa toplanarak

$$v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

bağıntısı elde edilir.



**Euler doğrusu.** Bir  $\triangle ABC$  de diklik merkezi  $H$ , ağırlık merkezi  $G$  ve çevrel çember merkezi  $O$  doğrusaldır. Bu doğruya Euler doğrusu denir. Ayrıca  $|HG| = 2|GO|$  dur.

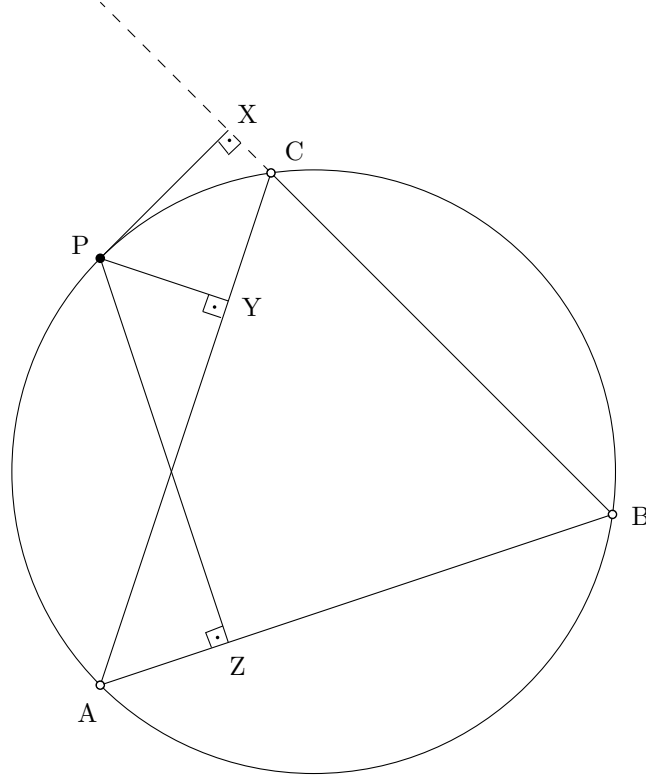
**İspat:**  $ABC$  üçgeninin kenar orta noktaları  $A', B', C'$  olsun.  $ABC$  ve  $A'B'C'$  üçgenleri benzerdir ve benzerlik oranı  $1 : 2$  dir.  $AC'A'B'$  bir paralelkenar olduğundan  $AA', B'C'$  kenarını ortalar. Buradan  $A'B'C'$  üçgeninin kenarortaylarının  $ABC$  üçgeninin kenarortayları üzerinde olduğunu görürüz. Dolayısıyla bu iki üçgen aynı  $G$  ağırlık merkezine sahiptirler.

$A'B'C'$  üçgeninin dikmeleri  $ABC$  üçgeninin kenar orta dikmeleri olduğu için  $A'B'C'$  üçgeninin diklik merkezi ile  $ABC$  üçgeninin çevrel çember merkezi aynıdır. Bu iki üçgeninin benzerliğinden  $|AH| = 2|A'O|$  olur. Ağırlık merkezinin  $|AG| = 2|GA'|$  özelliğini biliyoruz. Ayrıca  $AD$  ve  $OA', BC$  ye dik olduğundan ötürü paraleldirler. Bu ise  $\widehat{HAG} = \widehat{OA'G}$  olmasını gerektirir. Yukarıda bulduğumuz sonuçları birleştirdiğimizde



$HAG$  ve  $OA'G$  üçgenlerinin benzer olduğunu ve dolayısıyla  $O, G, H$  noktalarının doğrusal olduğunu göstermiş oluruz. Ayrıca buradaki benzerlik oranı  $1 : 2$  olduğundan  $|HG| = 2|GO|$  sonucu da çıkar.

**Simson doğrusu.** Bir üçgenin çevrel çemberi üzerinde alınan bir noktadan kenarlara inilen dikme ayakları doğrusaldır. Bu doğruya Simson doğrusu denir. Çevrel çember üzerinde olmayan noktalar için bu özellik geçerli değildir.



**Ceva Teoremi.** Bir  $ABC$  üçgeninde  $X, Y, Z$  sırasıyla  $BC, CA, AB$  kenarları üzerinde ve köşelerden farklı noktalar olmak üzere,  $AX, BY, CZ$  doğruları ancak ve ancak

$$\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1$$

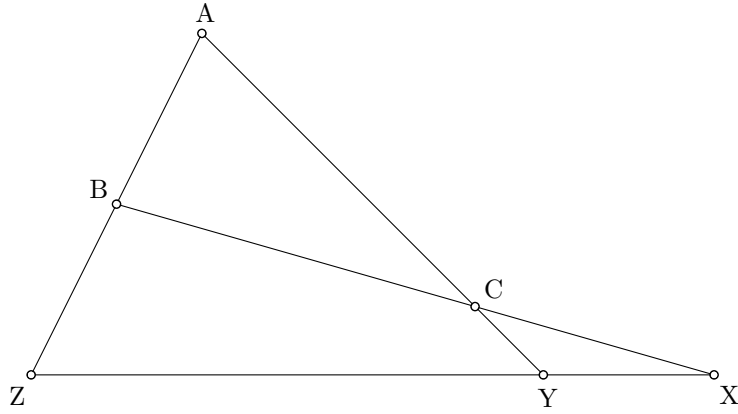
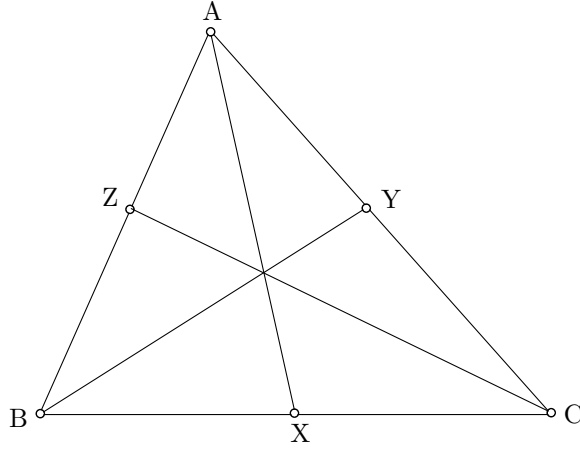
olduğunda bir noktada kesişirler.

**Menelaus Teoremi.** Bir  $ABC$  üçgeninde  $BC, CA, AB$  kenarları üzerinde alınan  $X, Y, Z$  noktaları ancak ve ancak

$$\frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|BZ|} = 1$$

olduğunda doğrusaldırlar.

**Örnekler:**



1.  $AC \neq BC$  olan bir  $\triangle ABC$  nin iç çemberi  $AB$ ,  $BC$  ve  $CA$  kenarlarına sırasıyla  $P$ ,  $Q$  ve  $R$  noktalarında teğet olsun.  $G$  üçgenin ağırlık merkezi ve  $I$  da iç merkezi olsun. Eğer  $GI \perp AB$  ise  $R, G$  ve  $Q$  nun doğrusal olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $G$  den geçen ve  $AB$  ye paralel olan bir doğru alalım. Bu doğru  $BC$  yi  $K$  da ve  $AC$  yi de  $N$  de kessin.  $CI$  açıortay olduğu için  $I$ ,  $NCK$  üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir. Burada  $GI$  nın  $NK$  kenarının orta dikmesi olduğunu kullandık.  $R, G, Q$  noktaları  $I$  dan  $NCK$  üçgeninin kenarlarına inilen dikme ayakları olduğu için bu noktalar Simson doğrusu üzerindedirler, yani doğrusaldırlar.

2. Bir  $\triangle ABC$  nin iç çemberinin merkezi  $I$ , çevrel çemberinin merkezi  $O$  olsun.  $\widehat{AIO} = 90^\circ$ ,  $\widehat{CIO} = 45^\circ$  olsun.  $AB : BC : CA$  oranını bulunuz.

**Çözüm:** Verilen bilgileri kullanarak

$$\widehat{AIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}$$

buluruz.  $\widehat{AIC} = 135^\circ$  olduğu için  $\widehat{B} = 90^\circ$  olur. Dolayısıyla  $ABC$  bir dik üçgendir,  $AC$  çevrel çemberin çapı ve  $O$  da  $AC$  nin orta noktasıdır.  $AI$  doğrusu

$BC$  kenarını  $D$  de kesiyorsa  $|CO| = |CD| = \frac{|AC|}{2} = \frac{b}{2}$  olduğu bulunur.  $ABC$  üçgeninde  $A$  açısına göre açıortay teoremini uygularsak

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}$$

elde ederiz. Ayrıca  $|CD| = \frac{b}{2}$  olduğu için  $|BD| = \frac{c}{2}$  bulunur. Dolayısıyla

$$a = |BC| = |BD| + |CD| = \frac{b+c}{2}$$

olur.  $ABC$  bir dik üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak  $a^2 = b^2 - c^2 = (b-c)(b+c)$  elde ederiz. Yukarıda bulduğumuz  $a$  değerini yerine yazarak

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = (b-c)(b+c)$$

eşitliğini ve buradan da istenilen oranın  $3 : 4 : 5$  olduğunu buluruz.

3. Bir  $ABC$  üçgeninde  $A, B, C$  köşelerinden kenarlara indirilen dikme ayakları sırasıyla  $D, E, F$  olsun.  $DE, EF, FD$  doğruları  $AB, BC, CA$  doğrularıyla sırasıyla  $X, Y, Z$  noktalarında kesişiyorlarsa

(a)  $X, Y, Z$  nin doğrusal olduğunu gösteriniz.

(b) Bu doğrunun  $ABC$  üçgeninin Euler doğrusuna dik olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** (a) Doğrusallığı göstermek için dört kez Menelaus teoremini ve bir kez de Ceva teoremini kullanacağız.  $ABC$  üçgeni ile sırasıyla  $YE, XD$  ve  $ZF$  kesenlerini alıp Menelaus teoremini uygularsak:

$$\begin{aligned} \frac{|YB|}{|YC|} \cdot \frac{|EC|}{|EA|} \cdot \frac{|FA|}{|FB|} &= 1 \\ \frac{|XA|}{|XB|} \cdot \frac{|DB|}{|DC|} \cdot \frac{|EC|}{|EA|} &= 1 \\ \frac{|ZC|}{|ZA|} \cdot \frac{|FA|}{|FB|} \cdot \frac{|DB|}{|DC|} &= 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca  $AD, BE, CF$  üçgenin yükseklikleri olduğu için diklik merkezinde kesişirler. Dolayısıyla Ceva teoremini kullanarak

$$\left(\frac{|EC|}{|EA|} \cdot \frac{|FA|}{|FB|} \cdot \frac{|DB|}{|DC|}\right)^2 = 1$$

buluruz. Bulduğumuz bu dört eşitliği çarptığımızda

$$\frac{|XA|}{|XB|} \cdot \frac{|YB|}{|YC|} \cdot \frac{|ZC|}{|ZA|} = 1$$

çıkar. Buradan Menelaus teoreminin tersini kullanarak  $X, Y, Z$  nin doğrusal olduğunu gösteririz.

(b) Bu kısmı çemberde kuvvet konusunda göstereceğiz.

4. Bir  $ABCD$  dörtgeninde, kenarlardan herhangi birisine paralel olmayan bir doğru  $AB, BC, CD, DA$  kenarlarını sırasıyla  $X, Y, Z, T$  noktalarında kesiyor.

(a)

$$\frac{|XA|}{|XB|} \cdot \frac{|YB|}{|YC|} \cdot \frac{|ZC|}{|ZD|} \cdot \frac{|TD|}{|TA|} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

(b) İfadenin tersi doğru mudur?

**Çözüm:** (a)  $A, B, C, D$  noktalarından verilen doğruya sırasıyla  $h_1, h_2, h_3, h_4$  diklerini indirelim. Benzer üçgenleri kullanarak

$$\frac{|XA|}{|XB|} = \frac{h_1}{h_2}, \quad \frac{|YB|}{|YC|} = \frac{h_2}{h_3}, \quad \frac{|ZC|}{|ZD|} = \frac{h_3}{h_4}, \quad \frac{|TD|}{|TA|} = \frac{h_4}{h_1}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitliklerin çarpımı ise istenileni verir.

(b) İfadenin tersi doğru değildir. Örneğin  $X, Y, Z, T$  orta noktalar ise (a) şıkkındaki çarpım 1 olur fakat bu noktalar doğrusal olmazlar.

## 1.5 Üçgende çemberler

İlk olarak  $ABC$  üçgenin iç teğet çemberini ele alalım.  $A, B$  ve  $C$  köşelerinden bu çembere çizilen teğetlerin uzunlukları sırasıyla  $u - a, u - b$  ve  $u - c$  dir.

Ayrıca üçgene dışarıdan teğet olan 3 tane daha çember vardır.  $A$  açısının iç açıortayı ile  $B$  ve  $C$  açılarının dış açıortayları bir  $I_a$  noktasında kesişirler. Bu nokta  $A$  ya karşılık gelen dışteğet çemberinin merkezidir. Benzer şekilde  $I_b$  ve  $I_c$  merkezli dış teğet çemberler vardır.  $A, B$  ve  $C$  köşelerinden  $I_a$  merkezli dışteğet çembere olan teğet uzunlukları  $u, u - c$  ve  $u - b$  dir.

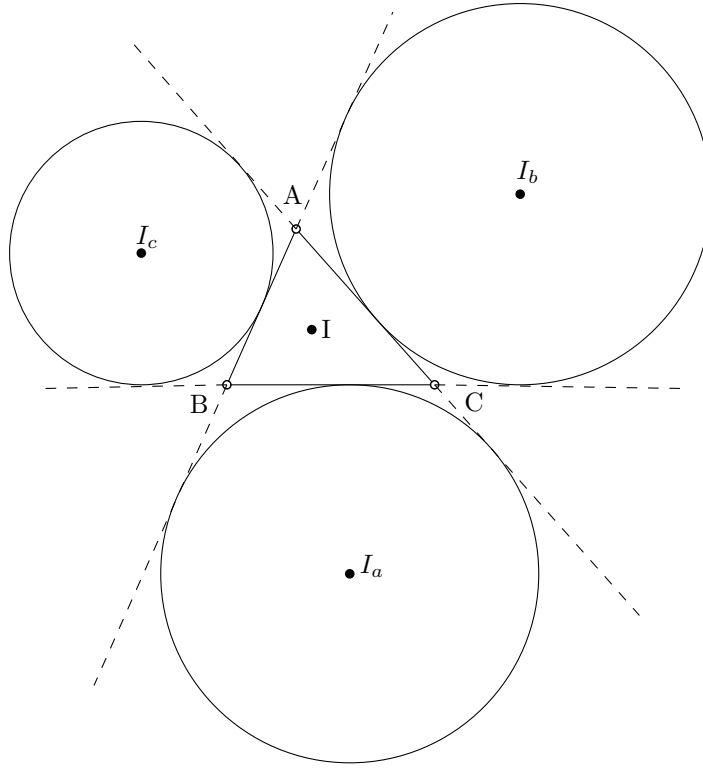
Dış teğet çemberlerin yarıçapları  $r_a, r_b, r_c$  ise

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad (5)$$

eşitliği sağlanır.

$I_a I_b I_c$  üçgeninin ortik üçgeni  $ABC$  üçgenidir.

Buraya kadar bahsettiğimiz 4 çembere birden teğet olan önemli bir çember vardır. Bir üçgenin kenarlarının orta noktaları, yükseklik ayakları ve diklik merkezi ile köşeler arasındaki doğru parçalarının orta noktalarının oluşturduğu 9 nokta çemberseldir. Bu çembere **dokuz nokta çemberi**, Euler çemberi veya Feuerbach çemberi denir. Bu çemberin merkezi  $[OH]$  nin orta noktasıdır ve yarıçapı  $R/2$  dir.

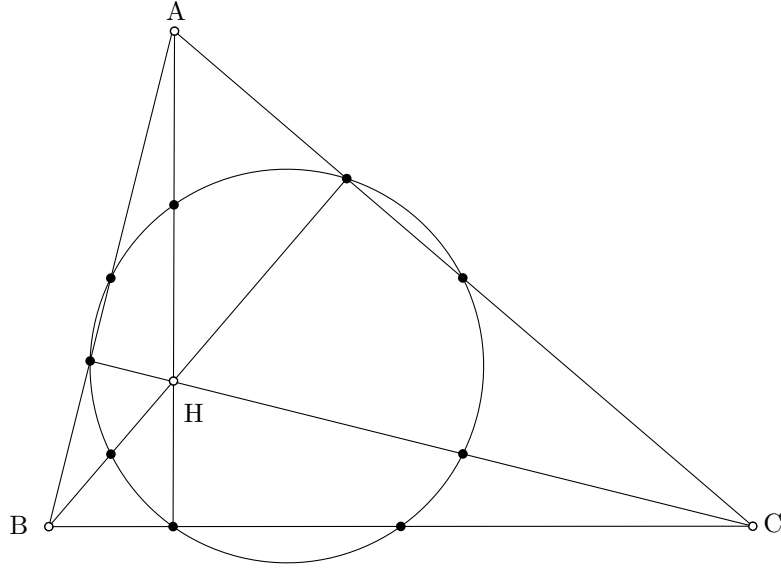


**İspat:** Bir  $ABC$  üçgeninde kenarların orta noktaları  $A', B', C'$ ; diklik merkezi  $H$ ; yükseklik ayakları  $D, E, F$ ;  $HA, HB, HC$  nin orta noktaları  $K, L, M$  ve çevrel çember merkezi  $O$  olsun.  $BC$  ortak kenarına sahip  $ABC$  ve  $HBC$  üçgenlerinin diğer kenarlarının orta noktaları  $C', B'$  ve  $L, M$  olduğundan  $LM$  ve  $C'B'$  doğru parçaları  $BC$  ye paraleldir ve uzunlukları ise  $|BC|/2$  dir. Benzer şekilde,  $AH$  ortak kenarına sahip  $BAH$  ve  $CAH$  üçgenlerinde  $B'M$  ve  $C'L$  paraleldir ve uzunlukları ise  $|AH|/2$  dir. Sonuç olarak,  $B'C'LM$  bir paralelkenardır. Ayrıca  $BC$  ve  $AH$  birbirlerine dik olduklarından bu bir dikdörtgendir. Benzer şekilde,  $A'B'KL$  ve  $C'A'MK$  de birer dikdörtgendir. Buradan  $A'K, B'L, C'M$  bir çemberin üç çapı olduğunu buluruz.  $\widehat{ADK}$  bir dik açı olduğundan bu çember  $D$  den de geçer. Simetriden ötürü  $E$  ve  $F$  den de geçer. Böylece dokuz nokta çemberini elde etmiş oluruz.

Ayrıca  $A'B'C'$  ve  $ABC$  benzerlik oranı  $1 : 2$  olan benzer üçgenler olduğundan dolayı dokuz nokta çemberinin yarıçapı  $R/2$  dir.  $K, L$  ve  $M, A', B'$  ve  $C'$  noktalarının çemberin merkezine göre simetrik noktalarıdır. Dolayısıyla  $KLM$  ve  $A'B'C'$  üçgenleri birbirinin çemberin merkezi etrafında  $180^\circ$  dönmüş halidir. Bu dönme altında diklik merkezleri  $O$  ve  $H$  yer değiştirir. Bu nedenle çemberin merkezi  $OH$  nin orta noktasıdır.

**Bazı bağıntılar:**

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$



$$|OI|^2 = R(R - 2r) \text{ ve } |OI_a|^2 = R(R + 2r_a) \quad (6)$$

Dar açılı bir üçgende,  $x, y, z$  çevrel çember merkezinin kenarlara olan uzaklıkları ise,  $x + y + z = R + r$  dir.

$AI$ , çevrel çemberi  $A_1$  noktasında kesiyor ise,  $|A_1B| = |A_1C| = |A_1I|$  eşitlikleri sağlanır.

**Örnek:** Bir  $A$  noktasından bir  $S$  çemberine  $AB$  ve  $AC$  de teğetleri çiziliyor.  $\triangle ABC$  nin içteğet çemberinin ve  $BC$  ye teğet olan dış teğet çemberinin merkezlerinin  $S$  çemberinde olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $D$ ,  $S$  çemberinin  $ABC$  üçgeni içerisinde kalan yayın,  $E$  ise dışında kalan yayın orta noktası olsun.  $\widehat{DBA}$  bir kiriş açısı olduğundan  $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DBC})$  dir. Dolayısıyla  $BD$  bir açıortaydır. Benzer şekilde  $CD$  de bir açıortaydır. Buradan  $D$  nin iç merkez olduğunu buluruz. Benzer şekilde  $E$  de bir dış teğet merkezidir.

## 1.6 Alan formülleri

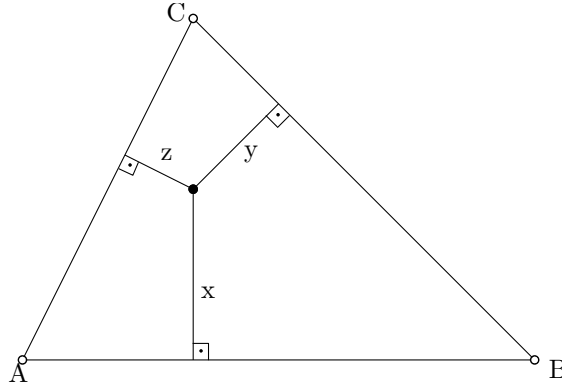
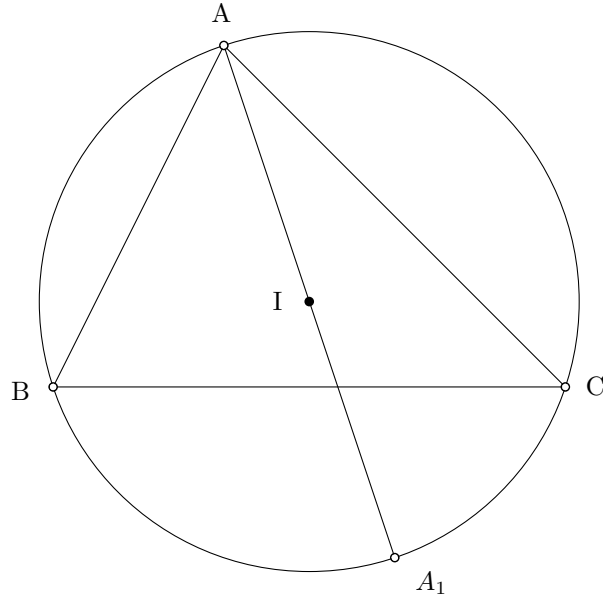
$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = ur, \quad S = (u - a)r_a$$

Heron formülü:  $\sqrt{u(u - a)(u - b)(u - c)}$

**Örnekler:**



1. (5) eşitliğini gösteriniz.

**Çözüm:** Göstermek istediğimiz eşitlikteki ifadeleri üçgenin alanı  $S$  ile çarpalım. Burada her bir kesir için farklı alan formülü kullacağız:  $S = (u - a)r_a = (u - b)r_b = (u - c)r_c$ . Böylece sol taraf  $(u - a) + (u - b) + (u - c) = 3u - (a + b + c) = u$  bulunur. Sağ tarafta ise  $S = ur$  formülü kullanılarak yine  $u$  elde edilir.

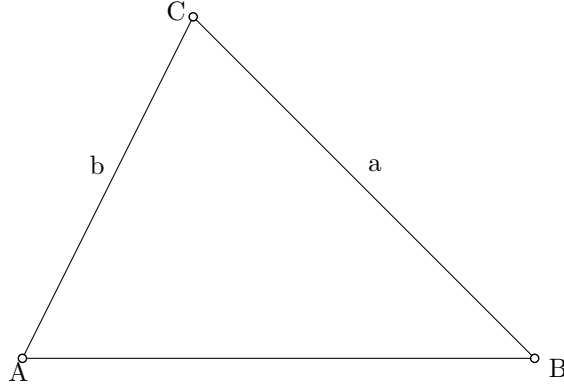
2. Bir üçgende

$$r_a r_b r_c \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} abc$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Alan formüllerinden

$$S = r_a(u - a) = r_b(u - b) = r_c(u - c) = \sqrt{u(u - a)(u - b)(u - c)} = \frac{abc}{4R}$$



olduğunu biliyoruz. Buradan

$$r_a r_b r_c = \frac{S^3}{(u-a)(u-b)(u-c)} = Su \quad \text{ve} \quad abc = 4SR$$

elde ederiz. Böylece istenilen eşitsizlik  $u \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$  eşitsizliğine dönüşür. Buradan  $\frac{a+b+c}{2R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$  ve sinüs teoremini kullanarak

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

denk eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise sinüs fonksiyonuna Jensen eşitsizliğinin uygulanmasından çıkar. Eşitlik ise üçgenin eşkenar olması durumunda olur.

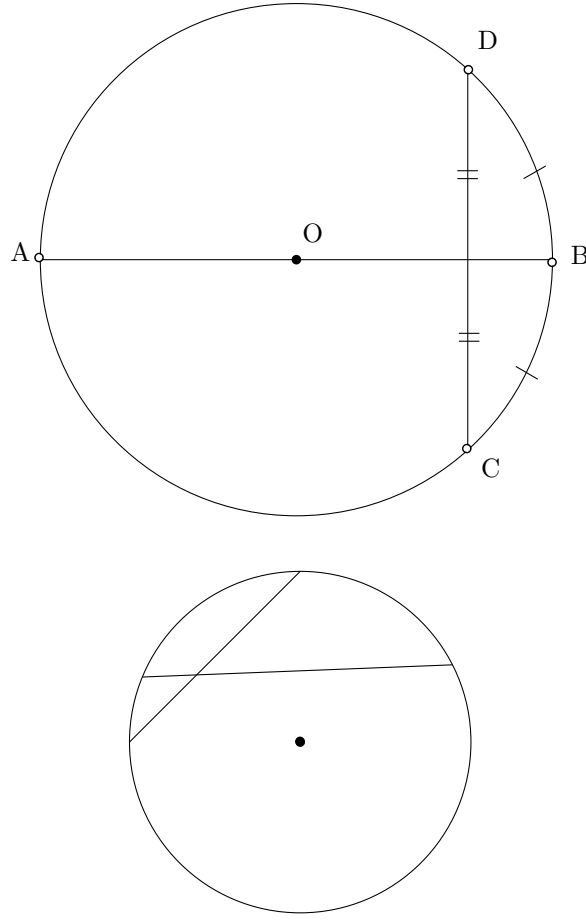
## 2 Çemberler

### 2.1 Kirişler ve Yaylar

Bir çember üzerindeki iki noktayı birleştiren doğru parçasına **kiriş** denir. Her kiriş çember üzerinde iki yay tanımlar. Bunlara kirişe ait yaylar diyelim. Kirişlerin ve yayların bazı özelliklerini şöyle sıralayabiliriz:

1. Bir çap dik olduğu kirişi ve bu kirişe ait yayları ortalar.
2. Yukarıdaki özelliğin tersi de doğrudur:
  - (a) Bir kirişi ortaltayan çap bu kirişe diktir ve bu kirişe ait yayları da ortalar.
  - (b) Bir yayı ortaltayan çap yayın ait olduğu kirişe diktir ve kirişi ortalar.
3. Merkezden eşit uzaklıkta olan kirişler ve bu kirişlere ait yayların uzunlukları eşittir.
4. Kirişler merkezden uzaklaştıkça uzunlukları azalır.





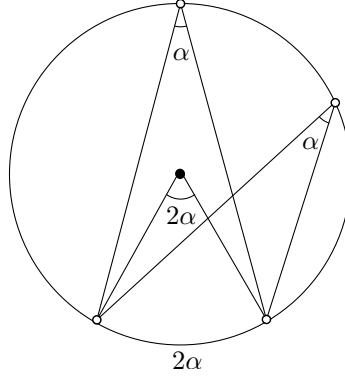
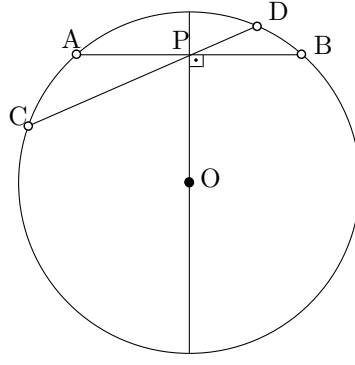
5. En uzun kirişler çaplardır.
6. Çember içindeki bir noktadan geçen en kısa kiriş o noktadan geçen çapa dik olan kiriştir.

## 2.2 Çemberde Açılar

Köşesi çemberin merkezinde olan bir açıya **merkez aç**ı denir ve ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşittir. **Çevre açısı** ise köşesi çemberin üzerinde olan ve kolları çemberi kesen açıdır ve ölçüsü gördüğü yayın yarısı kadardır. Yani çevre aç, aynı yayı gören merkez açının yarısıdır. Buradan, aynı yayı gören iki çevre açısının aynı olduğu sonucunu elde ederiz. Bu sonuç oldukça kullanışlıdır. Özel olarak, buradan çapı gören çevre açının  $90^\circ$  olduğu sonucu çıkar.

Köşesi çember üzerinde ve bir kolu çembere teğet, diğer kolu çemberin bir kirişi olan açıya **teğet-kiriş açısı** denir ve ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

Paralel olmayan iki kiriş, çemberin içinde veya dışında kesişirler. Buna göre iki kirişin arasında kalan açıya **iç** veya **dış aç**ı denir. Bir iç açının ölçüsü gördüğü yayların ölçülerinin



toplamlarının yarısıdır. Bir dış açının ölçüsü ise gördüğü yayların ölçülerinin farkının yarısıdır. Ayrıca aynı yayları gören iç ve dış açılarının toplamı gördükleri büyük yayın ölçüsüne eşittir. Benzer şekilde aynı yayları gören iç ve dış açılarının farkı gördükleri küçük yayın ölçüsüne eşittir.

### 2.3 Çemberde Kuvvet

Bir çemberde  $[AB]$  ve  $[A'B']$  kirişleri bir  $P$  noktasında kesişiyorlarsa

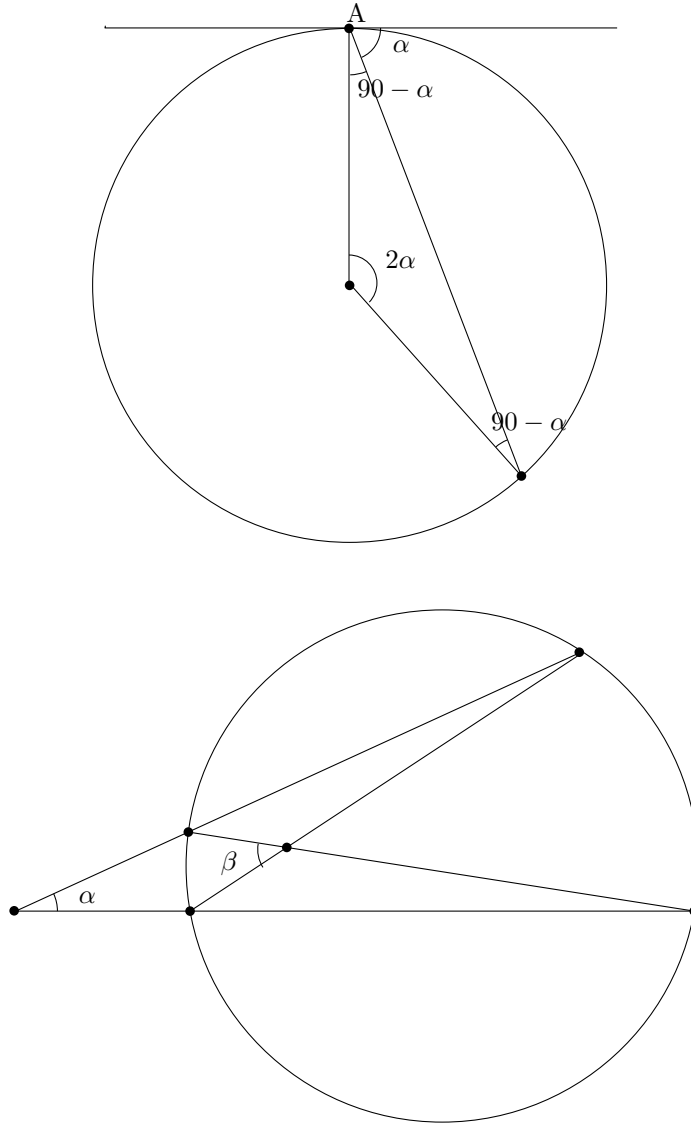
$$|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|$$

eşitliği sağlanır. Yani eşitlikteki ifade sadece  $P$  noktasına ve verilen çembere bağlıdır. Çemberin merkezi  $O$  ve yarıçapı  $r$  olsun.  $P$  çemberin dışında bir nokta ise,  $P$  den çembere bir  $PT$  teğeti çizebiliriz. Bu durumda

$$|PA| \cdot |PB| = |PT|^2 = |OP|^2 - r^2$$

olur. Genel olarak, bir  $P$  noktasının verilen bir çembere göre kuvveti  $|OP|^2 - r^2$  olarak tanımlanır.

Tanımdan dolayı kuvvet,  $P$  çemberin içindeyse negatif; çemberin üzerindeyse 0 ve çemberin



dışındaysa pozitiftir. Her durumda  $|PA| \cdot |PB| = ||OP|^2 - r^2|$  dir.

### Örnekler:

1. Bir  $ABC$  üçgeninde  $BD$  açıortayı çiziliyor.  $\triangle BDC$  nin çevrel çemberi  $AB$  yi  $E$  de;  $\triangle ABD$  nin çevrel çemberi ise  $BC$  yi  $F$  de kesiyorsa  $|AE| = |CF|$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $A$  nın  $\triangle BDC$  nin çevrel çemberine göre kuvvetinden  $|AE| \cdot |AB| = |AD| \cdot |AC|$  olur. Benzer şekilde  $C$  nin  $\triangle ABD$  nin çevrel çemberine göre kuvvetinden  $|CF| \cdot |CB| = |CD| \cdot |CA|$  olur. Buradan

$$\frac{|AE|}{|CF|} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{|BC|}{|AB|}$$

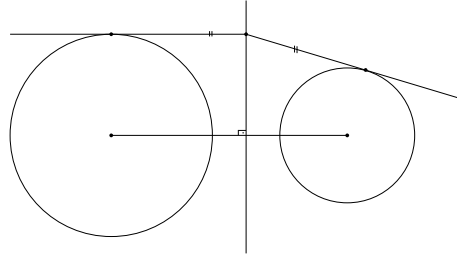
olduğu bulunur. Açıkortay teoreminden  $\frac{AB}{CB} = \frac{|AD|}{|CD|}$  olduğu için  $|AE| = |CF|$  elde edilir.

2. (6) deki  $|OI|^2 = R(R - 2r)$  ve  $|OI_a|^2 = R(R + 2r_a)$  eşitlikleri gösteriniz.

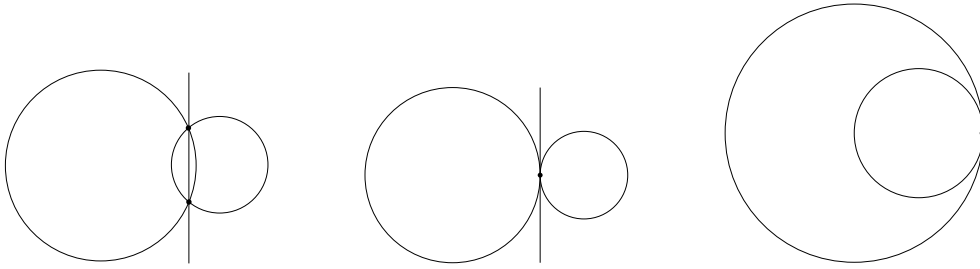
**Çözüm:** İçteğet çemberin merkezi  $I$  nın çevrel çembere göre kuvvetini ele alalım. Bir yandan kuvvet  $|OI|^2 - R^2$  olarak bulunur. Öte yandan  $AI$  yı uzatıp çevrel çemberi  $A_1$  de kestirebiliriz ve  $AA_1$  kirişini kuvveti hesaplamada kullanabiliriz. Bu durumda ise kuvvet  $|AI| \cdot |IA_1|$  ile hesaplanabilir.  $|IA_1| = |A_1C|$  olduğu bilindiği için sinüs teoreminden  $\frac{|A_1C|}{\sin(\widehat{BAC}/2)} = 2R$ ,  $|IA_1| = 2R \sin(\widehat{BAC}/2)$  elde ederiz. Ayrıca  $\sin(\widehat{BAC}/2) = \frac{r}{|AI|}$  olduğu için  $|AI| \cdot |IA_1| = 2Rr$  buluruz.  $I$ , çevrel çemberin içinde olduğu için kuvvet negatif olmalıdır, dolayısıyla istenen sonuç gösterilmiş olur. Diğer eşitlik te benzer şekilde kolaylıkla gösterilir.

## 2.4 Kuvvet eksenini

Verilen iki çembere göre aynı kuvvete sahip noktaların geometrik yeri çemberlerin merkezlerini birleştiren doğruya dik bir doğrudur. Bu doğruya bu iki çemberin **kuvvet eksenini** denir.



Eğer iki çember kesişiyorlarsa kuvvet eksenini ortak kirişten geçer. Eğer iki çember birbirine teğet iseler, ortak teğet kuvvet eksenidir.



Merkezleri doğrusal olmayan üç çemberin ikişerli kuvvet eksenleri bir noktada kesişir. Bu noktaya bu çemberlerin **kuvvet merkezi** denir.

**Örnek:** Bir  $ABC$  üçgeninde  $A$  ve  $C$  köşelerinden geçen  $O$  merkezli bir çember  $AB$  ve  $BC$  kenarlarını sırasıyla  $K$  ve  $N$  noktalarında kesiyor.  $ABC$  ve  $KBN$  üçgenlerinin çevrel çemberleri farklı  $B$  ve  $M$  noktarında kesişiyorsa  $m(\widehat{OMB}) = 90^\circ$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $BM, NK$  ve  $CA$  doğruları verilen üç çemberin ikişerli olarak kuvvet eksenleridir ve bu doğrular kuvvet merkezinde kesişirler. Bu noktayı  $P$  ile gösterirsek,  $MNCP$  bir kirişler dörtgenidir. Bunun nedeni,  $m(\widehat{MNC}) = 360^\circ - (180^\circ - \widehat{B} + 180^\circ - \widehat{A}) = \widehat{A} + \widehat{C}$  ve bunun da  $MPC$  açısının tümleyeni olmasıdır.  $O$  merkezli çemberin yarıçapı  $r$  olsun. Bu durumda, çemberde kuvvetten

$$|BM| \cdot |BP| = |BN| \cdot |BC| = |OB|^2 - r^2$$

ve

$$|PM| \cdot |PB| = |PN| \cdot |PK| = |OP|^2 - r^2$$

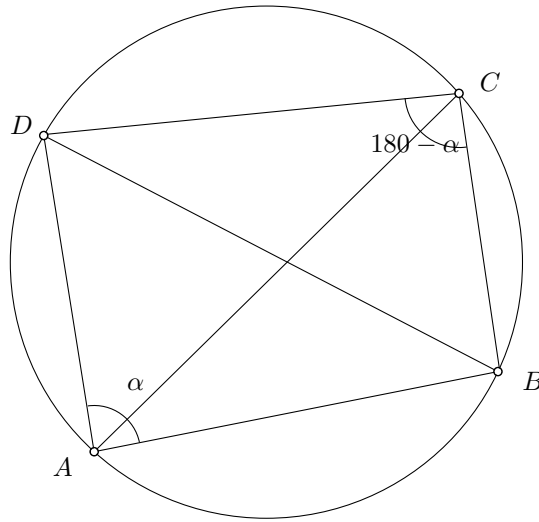
elde edilir. Buradan

$$|OB|^2 - |OP|^2 = |BP| \cdot (|BM| - |PM|) = |BM|^2 - |PM|^2$$

olduğu ve dolayısıyla  $OM$  nin  $MB$  ye dik olduğu bulunur.

## 2.5 Kirişler Dörtgeni

Doğrusal olmayan her üç noktanın çembersel olduğunu biliyoruz. Dört nokta için ise bu her zaman geçerli değildir. Dört nokta çembersel olduğunda kenarları bir çemberin kirişleri olan bir dörtgen oluşur ve bu dörtgene **kirişler dörtgeni** denir. Bir kirişler dörtgeninde karşılıklı açılar toplamı  $180^\circ$  dir ve eşdeğer olarak aynı kenarı gören açılar eşittir. Karşıt olarak da, bir dörtgende bu özellikler varsa kirişler dörtgenidir.



Kenar uzunlukları  $a, b, c, d$  ve yarıçevresi  $u$  olan bir kirişler dörtgeninin alanı

$$S = \sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}$$

dir. Bu alan aynı kenar uzunluklarına sahip dörtgenler için en büyük olandır.

Genel olarak, herhangi bir dışbükey dörtgeninin alanı

$$S = \sqrt{\left((u-a)(u-b)(u-c)(u-d) - abcd \cos^2 \left(\frac{A+B}{2}\right)\right)}$$

dir.

**Batlamyus (Ptolemy) Teoremi.** Bir  $ABCD$  dörtgeni ancak ve ancak

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$$

olduğunda kirişler dörtgenidir.

**Örnekler:**

1. Bir dar açılı  $\triangle ABC$  de,  $H$  diklik merkezi;  $A', B', C'$  dikme ayakları ve  $P$  de  $AH$  nin orta noktası olsun.  $B'P \cap AB = \{Q\}$  ve  $A'C' \cap BB' = \{R\}$  ise  $QR \perp BC$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $m(\widehat{QBB'}) = \alpha$  olsun.  $AB'H$  dik üçgeninde muhteşem üçlü özelliğinden  $m(\widehat{AHB'}) = \alpha$  olur.  $AC'HB'$  bir kirişler dörtgeni olduğundan  $m(\widehat{AHB'}) = \alpha$  dır. Ayrıca ters açılardan  $m(\widehat{A'HB}) = \alpha$  dır. Öte yandan  $A'BC'H$  kirişler dörtgeni olduğundan  $m(\widehat{A'CB}) = \alpha$  bulunur. Karşılıklı açılar toplamı  $180^\circ$  olduğundan  $B'QC'R$  de bir kirişler dörtgenidir. Böylece  $m(\widehat{B'RQ}) = \alpha$  elde ederiz. Bu ise  $AH$  nin  $QR$  ye paralel olduğunu ve dolayısıyla  $QR$  nin  $BC$  ye dik olduğunu gösterir.

2.  $ABCD$  bir kirişler dörtgeni olmak üzere,  $H_c$  ve  $H_d$  sırasıyla  $ABD$  ve  $ABC$  üçgenlerinin diklik merkezleri olsun.  $CDH_cH_d$  nin bir paralelkenar olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $CH_d$  ve  $DH_c$ ,  $AB$  ye dik oldukları için paraleldirler. Ayrıca  $ABCD$  kirişler dörtgeni olduğu için  $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \alpha$  olur. Diklik merkezinin bir özelliğinden (1) dolayı  $|CH_d| = |DH_c| = |AB| |\cot \alpha|$  olur. Dolayısıyla  $CDH_cH_d$  nin bir paralelkenardır.

### 3 Eşitsizlikler

**Üçgen eşitsizliği.** Bir düzlemdeki herhangi  $A, B$  ve  $C$  noktaları için

$$|AB| + |BC| \geq |AC|$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik sadece  $A, B$  ve  $C$  noktalarının bu sırayla aynı doğru üzerinde olması durumunda mümkündür.

Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar vardır.

**Batlamyus (Ptolemy) eşitsizliği.** Düzlemdeki  $A, B, C, D$  farklı noktaları için

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik sadece verilen noktalar doğrusal veya  $ABCD$  dışbükey kirişler dörtgeni olduğunda sağlanır.

**Paralelkenar eşitsizliği.** Bir  $ABCD$  dörtgeninde

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \geq |AC|^2 + |BD|^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik sadece  $ABCD$  bir paralelkenar olduğunda sağlanır.

Bir üçgende  $R \geq 2r$  dir. Eşitlik sadece üçgen eşkenar olduğunda mümkündür.

**Örnekler:**

1.  $\triangle ABC$  nin  $A$  kenarından çıkan bir doğru  $BC$  yi  $X$  de ve  $\triangle ABC$  nin çevrel çemberini de  $Y$  de kesiyor ise

$$\frac{1}{|AX|} + \frac{1}{|XY|} \geq \frac{4}{|BC|}$$

olduğunu gösteriniz. Eşitlik hangi durumda mümkündür?

**Çözüm:**  $HO \leq GO$  eşitsizliğini kullanarak

$$\frac{1}{|AX|} + \frac{1}{|XY|} \geq \frac{2}{\sqrt{|AX| \cdot |XY|}}$$

elde ederiz.  $X$  noktasının çembere göre kuvvetinden bulunan  $|AX| \cdot |XY| = |BX| \cdot |XC|$  eşitliğini kullanarak

$$\frac{1}{|AX|} + \frac{1}{|XY|} \geq \frac{2}{\sqrt{|BX| \cdot |XC|}}$$

olduğunu buluruz. Ayrıca  $GO \leq AO$  eşitsizliğinden dolayı

$$\sqrt{|BX| \cdot |XC|} \leq \frac{|BX| + |XC|}{2} = \frac{|BC|}{2}$$

olur. Buradan da istenilen sonuç elde edilir. Eşitlik hali ancak  $|AX| = |XY|$  ve  $|BX| = |XC|$  olduğunda mümkündür.

2.  $P$ ,  $\triangle ABC$  nin bir iç noktası olsun.  $P$  den geçen ve  $AB, BC, CA$  ya paralel olan

doğrular sırasıyla  $BC$  yi  $L$  de,  $CA$  yı  $M$  de ve  $AB$  yi de  $N$  de kesiyor ise

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} \leq \frac{1}{8}$$

olduğunu gösteriniz. Eşitliğin olması için  $P$  nin yerini belirleyiniz.

**Çözüm:** Bir  $ABC$  üçgeninin alanını  $S(ABC)$  ile gösterelim.  $PLC$  ve  $ZBC$  üçgenleri benzer ve aynı yüksekliğe sahip üçgenlerde alanlar kenar uzunluklarıyla orantılı olduğu için

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|ZP|}{|PC|} = \frac{S(BPZ)}{S(BPC)} = \frac{S(APZ)}{S(APC)}$$

olur. Buradan

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{S(BPZ) + S(APZ)}{S(BPC) + S(APC)} = \frac{S(APB)}{S(BPC) + S(APC)}$$

bulunur.  $x = S(BPC)$ ,  $y = S(APC)$  ve  $z = S(APB)$  olarak alırsak,

$$\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{z}{x + y}$$

olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde

$$\frac{|CM|}{|MA|} = \frac{x}{y + z} \quad \text{ve} \quad \frac{|AN|}{|NB|} = \frac{y}{x + z}$$

elde edilir. Böylece istenilen eşitsizlik

$$\frac{z}{x + y} \cdot \frac{x}{y + z} \cdot \frac{y}{x + z} \leq \frac{1}{8}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada AG eşitsizliğini kullanarak

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}, \quad y + z \geq 2\sqrt{yz}, \quad x + z \geq 2\sqrt{xz}$$

elde ederiz. Bu ifadeleri taraf tarafa çarparak istenilen eşitsizliği göstermiş oluruz. Eşitlik hali ise AG eşitsizlikten dolayı  $x = y = z$  durumunda mümkündür. Yani  $P$  ağırlık merkezi olmalıdır.



## 4 Trigonometri

### 4.1 Trigonometrik fonksiyonlar

Bir  $ABC$  dik üçgeninde  $C$  açısı  $90^\circ$  ve kenar uzunlukları  $a, b, c$  olmak üzere  $A$  açısının trigonometrik fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{a}{c}, & \cos A &= \frac{b}{c}, \\ \tan A &= \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A}, & \cot A &= \frac{b}{a} = \frac{\cos A}{\sin A}, \\ \sec A &= \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos A}, & \csc A &= \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin A}.\end{aligned}$$

Yarıçapı  $r$  olan çember yardımıyla  $90^\circ$  den büyük açılar için de benzer şekilde trigonometrik fonksiyonları tanımlayabiliriz. Çemberin merkezi ile  $xy$  koordinat sisteminin merkezlerini  $O$  noktasında çakıştırdığımızda çember üzerindeki herhangi bir  $P$  noktasının koordinatlarını  $(x, y)$  ile gösterebiliriz. Bu durumda  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  olduğunu biliyoruz.  $OX$  ışıını ile  $OP$  doğru parçası arasında kalan açının (saat yönünün tersi istikametinde hareket ettiğimiz kabul ediyoruz) trigonometrik fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{|y|}{r}, & \cos A &= \frac{|x|}{r}, \\ \tan A &= \frac{|y|}{|x|} = \frac{\sin A}{\cos A}, & \cot A &= \frac{|x|}{|y|} = \frac{\cos A}{\sin A}, \\ \sec A &= \frac{r}{|x|} = \frac{1}{\cos A}, & \csc A &= \frac{r}{|y|} = \frac{1}{\sin A}.\end{aligned}$$

Yarıçapı  $r$  olan bir çemberde,  $r$  uzunluğunda bir yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 *radyan* denir. Dolayısıyla  $2\pi$  *radyan* =  $360^\circ$  olur. Buradan

$$1 \text{ radyan} = 180^\circ/\pi \quad \text{ve} \quad 1^\circ = \pi/180 \text{ radyan}$$

elde edilir.

Trigonometrik fonksiyonların alacağı değerlerin işaretlerini ve değişimlerini aşağıdaki tablodaki gibi özetleyebiliriz.

| $A$                     | $\sin A$                  | $\cos A$                  | $\tan A$                       | $\cot A$                       | $\sec A$                        | $\csc A$                        |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $0^\circ - 90^\circ$    | $+$<br>$0 \rightarrow 1$  | $+$<br>$1 \rightarrow 0$  | $+$<br>$0 \rightarrow \infty$  | $+$<br>$\infty \rightarrow 0$  | $+$<br>$1 \rightarrow \infty$   | $+$<br>$\infty \rightarrow 1$   |
| $90^\circ - 180^\circ$  | $+$<br>$1 \rightarrow 0$  | $-$<br>$0 \rightarrow -1$ | $-$<br>$-\infty \rightarrow 0$ | $-$<br>$0 \rightarrow -\infty$ | $-$<br>$-\infty \rightarrow -1$ | $+$<br>$1 \rightarrow \infty$   |
| $180^\circ - 270^\circ$ | $-$<br>$0 \rightarrow -1$ | $-$<br>$-1 \rightarrow 0$ | $+$<br>$0 \rightarrow \infty$  | $+$<br>$\infty \rightarrow 0$  | $-$<br>$-1 \rightarrow -\infty$ | $-$<br>$-\infty \rightarrow -1$ |
| $270^\circ - 360^\circ$ | $-$<br>$-1 \rightarrow 0$ | $+$<br>$0 \rightarrow 1$  | $-$<br>$-\infty \rightarrow 0$ | $-$<br>$0 \rightarrow -\infty$ | $+$<br>$\infty \rightarrow 1$   | $-$<br>$-1 \rightarrow -\infty$ |

Bazı temel açılar için trigonometrik fonksiyonların alacağı değerleri aşağıdaki tablodaki gibi özetleyebiliriz. Tabloda  $A$  açısının değeri derece ve radyan olarak verilmiştir.

| $A$                                      | $\sin A$                      | $\cos A$                      | $\tan A$             | $\cot A$             | $\sec A$              | $\csc A$              |
|------------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $0^\circ = 0 \text{ rad}$                | 0                             | 1                             | 0                    | $\infty$             | 1                     | $\infty$              |
| $15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$  | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | $2 - \sqrt{3}$       | $2 + \sqrt{3}$       | $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ | $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ |
| $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$   | $\frac{1}{2}$                 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$          | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$           | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 2                     |
| $45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$          | $\frac{\sqrt{2}}{2}$          | 1                    | 1                    | $\sqrt{2}$            | $\sqrt{2}$            |
| $60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$   | $\frac{\sqrt{3}}{2}$          | $\frac{1}{2}$                 | $\sqrt{3}$           | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 2                     | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ |
| $75^\circ = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | $2 + \sqrt{3}$       | $2 - \sqrt{3}$       | $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ | $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ |
| $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$   | 1                             | 0                             | $\pm\infty$          | 0                    | $\pm\infty$           | 1                     |

## 4.2 Temel eşitlikler ve açılım formülleri

Bu bölümde çeşitli sorularda karşımıza çıkan temel trigonometrik özdeşlikleri vereceğiz.

1.  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ,
2.  $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ ,
3.  $\csc^2 A - \cot^2 A = 1$ ,
4.  $\sin(-A) = -\sin A$ ,  $\csc(-A) = -\csc A$ ,
5.  $\cos(-A) = \cos A$ ,  $\sec(-A) = \sec A$ ,
6.  $\tan(-A) = -\tan A$ ,  $\cot(-A) = -\cot A$ .

İki açı toplamını veya farkını içeren özdeşlikler aşağıdakilerdir.

- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ ,
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ ,
- $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$ ,
- $\cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot A \pm \cot B}$ .

$2A$  ve  $3A$  değerlerini içeren özdeşlikler aşağıdakilerdir.

- $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ ,
- $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$ ,
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$ ,
- $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$ ,
- $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ ,
- $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$ .

Trigonometrik fonksiyonların toplamını, farkını veya çarpımını içeren özdeşlikler aşağıdakilerdir.

- $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ ,
- $\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$ ,
- $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ ,
- $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}$ ,
- $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ ,
- $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ ,
- $2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ .
- Her  $x \in \mathbb{R}$  için,  $t = \tan \frac{x}{2}$  olmak üzere  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  ve  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  olur.
- Bir üçgenin iç açıları  $\alpha, \beta, \gamma$  olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.  
 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$ , ve  
 $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$ .

- Trigonometrik Ceva Teoremi.

Bir  $ABC$  üçgeninde  $X, Y, Z$  sırasıyla  $BC, CA, AB$  kenarları üzerinde ve köşelerden farklı noktalar olmak üzere,  $AX, BY, CZ$  doğruları ancak ve ancak

$$\frac{\sin(\widehat{BAX})}{\sin(\widehat{XAC})} \cdot \frac{\sin(\widehat{CBY})}{\sin(\widehat{YBA})} \cdot \frac{\sin(\widehat{ACZ})}{\sin(\widehat{ZCB})} = 1$$

olduğunda bir noktada kesişirler.

### Örnekler:

1. Bir  $ABCD$  karesi veriliyor. Eğer  $B$  ve  $K, AC$  doğrusunun aynı tarafında ve  $ACK$  hipotenüsü  $AC$  olan bir dik üçgen ise

$$|BK| = \frac{||AK| - |CK||}{\sqrt{2}} \text{ ve } |DK| = \frac{|AK| + |CK|}{\sqrt{2}}$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $m(\widehat{KCA}) = \alpha \leq 45^\circ$  olsun.  $A, K, B, C, D$  noktaları çapı  $AC$  olan çember üzerinde olduğu için

$$|BK| = |AC| \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{|AC|(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\sqrt{2}}$$

ve

$$|DK| = |AC| \sin(45^\circ + \alpha) = \frac{|AC|(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Ayrıca  $|AC| \cos \alpha = |CK|$  ve  $|AC| \sin \alpha = |AK|$  olduğundan istenen sonuç elde edilir.

2. Bir  $ABC$  üçgeninde  $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$  ve  $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$  dir.  $D$  ve  $E$  sırasıyla  $AC$  ve  $AB$  kenarları üzerinde  $m(\widehat{CBD}) = 40^\circ$  ve  $m(\widehat{BCE}) = 70^\circ$  olacak şekilde iki nokta olsun.  $BD \cap CE = \{F\}$  ise  $AF \perp BC$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Verilenlerden  $m(\widehat{ABD}) = 20^\circ$ ,  $m(\widehat{BCA}) = 80^\circ$  ve  $m(\widehat{ACE}) = 90^\circ$  olduğu kolayca görülür.  $A$  dan  $BC$  ye inilen dikmenin ayağı  $G$  olsun. Bu durumda  $m(\widehat{BAG}) = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{CAG}) = 10^\circ$  olur ve

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\widehat{BAG}) \sin(\widehat{ACE}) \sin(\widehat{CBD})}{\sin(\widehat{CAG}) \sin(\widehat{BCE}) \sin(\widehat{ABD})} &= \frac{\sin 30^\circ \sin 10^\circ \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ \sin 70^\circ \sin 20^\circ} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 10^\circ (2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ)}{\sin 10^\circ \sin 70^\circ \sin 20^\circ} = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Trigonometrik Ceva Teoreminden dolayı  $AG, BD$  ve  $CE$  doğruları bir noktada kesişirler. Dolayısıyla  $F$ ,  $AG$  üzerindedir ve  $AF \perp BC$  dir.

## 5 Analitik Geometri

$P_1(x_1, y_1)$  ve  $P_2(x_2, y_2)$  bir düzlemde iki nokta olsun.

- İki nokta arasındaki uzaklık formülü:  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .
- İki nokta arasındaki orta nokta:  $P = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ .

- İki nokta arasındaki doğrunun denklemi:  $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = \text{eğim}$ .
- Eğimi  $m$  ve  $y$ -keseni  $b$  olan doğrunun denklemi:  $y = mx + b$ .
- $x$ -keseni  $a \neq 0$  ve  $y$ -keseni  $b \neq 0$  olan doğrunun denklemi:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .
- $(x_1, y_1)$  noktasının  $Ax + By + C = 0$  doğrusuna olan uzaklık formülü:  $\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .
- Eğimleri  $m_1$  ve  $m_2$  olan iki doğru arasındaki açı  $\alpha$  ise  $\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$  dir.
- İki doğru birbirine ancak ve ancak  $m_1 = m_2$  ise paraleldir.
- İki doğru birbirine ancak ve ancak  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$  ise diktir. (Burada yatay ve dikey doğruları ele almıyoruz.)
- $(x_0, y_0)$  merkezli ve  $R$  yarıçaplı çemberin denklemi:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ .
- Köşeleri  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  ve  $(x_3, y_3)$  noktalarında olan üçgenin alanı:

$$A = \frac{1}{2}(x_1 y_2 + y_1 x_3 + y_3 x_2 - y_2 x_3 - y_1 x_2 - x_1 y_3).$$

### Örnekler:

1.  $O$ , bir  $ABC$  üçgeninin çevrel çember merkezi ve  $CD$ ,  $AB$  kenarına çizilen kenarortay olsun.  $E$ ,  $ACD$  üçgeninin ağırlık merkezi ise  $OE \perp CD$  ancak ve ancak  $|AB| = |AC|$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Üçgeninin kartezyen koordinatları  $B(0, 0), C(6a, 0)$  ve  $A(4b, 2c)$  olsun. Bunlara göre diğer noktaların koordinatlarını hesaplayabiliriz.  $D$ ,  $AB$  nin orta noktası olduğu için  $D(2b, c)$  dir.  $E$ ,  $ADC$  üçgeninin ağırlık merkezi olduğu için  $DE$  bir kenarortaydır, dolayısıyla  $AC$  ile orta nokta  $F(3a+2b, c)$  de kesişir.  $|DE| : |EF| = 2 : 1$  olduğu için  $E(2b + 2a, c)$  dir.  $R$ ,  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı olmak üzere,  $O$  nun koordinatları  $(3a, \sqrt{R^2 - 9a^2})$  dir. Buradan

$$CD \text{ nin eğimi} = \frac{-c}{6a - 2b} \quad \text{ve} \quad OE \text{ nin eğimi} = \frac{\sqrt{R^2 - 9a^2} - c}{a - 2b}$$

bulunur.  $CD \perp OE$  olması ancak eğimlerin çarpımının  $-1$  olması durumunda mümkündür. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{-c}{6a - 2b} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - 9a^2} - c}{a - 2b} &= 1 \\ c(\sqrt{R^2 - 9a^2} - c) &= (6a - 2b)(a - 2b) \\ c\sqrt{R^2 - 9a^2} &= c^2 + 6a^2 - 14ab + 4b^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan  $AO = R$  eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} |AO|^2 &= (3a - 4b)^2 + (\sqrt{R^2 - 9a^2} - 2c)^2 = R^2 \\ (3a - 4b)^2 + R^2 - 9a^2 - 4c\sqrt{R^2 - 9a^2} + 4c^2 &= R^2 \\ 9a^2 - 24ab + 16b^2 - 9a^2 + 4c^2 &= 4c\sqrt{R^2 - 9a^2} \\ -6ab + 4b^2 + c^2 &= c\sqrt{R^2 - 9a^2} \end{aligned}$$

buluruz. Dolayısıyla  $CD \perp OE$  olması ancak ve ancak

$$\begin{aligned} -6ab + 4b^2 + c^2 &= c^2 + 6a^2 - 14ab + 4b^2 \\ 8ab &= 6a^2 \\ 4b &= 3a \end{aligned}$$

olması durumunda mümkündür. Bu ise  $A$  noktasının  $BC$  nin orta dikmesi üzerinde olduğunu gösterir, dolayısıyla  $|AB| = |AC|$  dir.

2.  $ABC$  ve  $AB_1C_1$  yönleri farklı ve benzer iki dik üçgen olsun. Ayrıca bu üçgenlerde dik açılarının  $C$  ve  $C_1$  köşelerinde ve  $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{C_1AB_1})$  olduğu veriliyor.  $BC_1 \cap B_1C = \{M\}$  ise  $AM$  ve  $CC_1$  doğruları varsa birbirine dik olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Kartezyen düzlemde  $A$  noktasını orijine yerleştirelim.  $|BC| : |AC| = k$ ,  $C(a, b)$  ve  $C_1(a_1, b_1)$  olsun. Buradan  $B$  nin koordinatları  $(a, b) + k(-b, a) = (a - kb, b + ka)$  olarak bulunur. Benzer şekilde  $B_1(a + kb_1, b + ka)$  bulunur. Böylece  $BC_1$  ve  $CB_1$  doğrularının denklemleri sırasıyla  $\frac{x - a_1}{y - b_1} = \frac{x - (a - kb)}{y - (b + ka)}$  ve  $\frac{x - a}{y - b} = \frac{x - (a_1 + kb_1)}{y - (b_1 - ka_1)}$  olur. İçler-dışlar çarpımı yapılarak denklemler şu hale getirilebilir:

$$\begin{aligned} BC_1 : kax + kby &= kaa_1 + kbb_1 + ba_1 - ab_1 - (b - b_1)x + (a - a_1)y \\ CB_1 : ka_1x + kb_1y &= kaa_1 + kbb_1 + ba_1 - ab_1 - (b - b_1)x + (a - a_1)y \end{aligned}$$

$M(x_0, y_0)$  bu iki denklemi birden sağladığı için  $kax_0 + kby_0 = kaa_1 + kbb_1 + ba_1 - ab_1 - (b - b_1)x_0 + (a - a_1)y_0$  olmalıdır. Bu ise  $\frac{x_0}{y_0} = -\frac{b_1 - b}{a_1 - a}$  olmasını gerektirir. Dolayısıyla  $CC_1$  ve  $AM$  doğruları diktir.

## 6 Geometrik yer ve çizim

Verilen bir özelliği sağlayan tüm noktaların oluşturduğu bir küme veya bir şekil bir geometrik yerdir. Geometrik yer problemlerinde yapılması gereken, istenilen özelliği sağlayan noktaların bulunduğu bir şekil bulmak ve bu şekildeki her noktanın da istenilen özelliğini göstermektir. Bazen ikinci kısım gözden kaçabilir, buna dikkat edilmesi gerekir.

**Bazı temel geometrik yerler:**



diyelim.  $EF$  nin  $AD$  ye paralel olduğu durumdaki kabul görmüş  $P$  noktalarının geometrik yerini bulunuz.

**Çözüm:**  $DF \perp EC$  ve  $EF \perp DC$  olduğu için  $F$ ,  $DEC$  üçgeninin diklik merkezidir. Dolayısıyla  $FC \perp DE$  dir. Böylece  $P$  nin  $DC$  çaplı yarı çember üzerinde olduğunu göstermiş oluruz. Burada  $P$ ,  $C, D$  ve  $M$  den farklı olmalıdır. Öte yandan, bu yarıçemberin üzerinde fakat  $C, D$  ve  $M$  den farklı bir  $P$  noktası için  $FC \perp DP$  yani  $FC \perp DE$  dir. Ayrıca  $DF \perp EC$  olduğu için yine  $F$ ,  $DEC$  üçgeninin diklik merkezidir. Dolayısıyla  $EF \perp DC$  olur ve bu  $P$  noktası istenilen özelliği sağlar. Sonuç olarak istenilen noktaların geometrik yeri  $C, D$  ve  $M$  den farklı olmak üzere  $DC$  çaplı yarı çember üzerindeki noktalardır.

3. Bir  $ABCD$  eşkenar dörtgeni içerisinde  $m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$  olacak şekilde  $M$  noktalarının geometrik yerini bulunuz.

**Çözüm:**  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$  olacak şekilde bir  $N$  noktası alalım. Bu durumda  $m(\widehat{NAM}) = m(\widehat{DMA})$  ve  $m(\widehat{NBM}) = m(\widehat{BMC})$  olur. Dolayısıyla  $AMBN$  bir kirişler dörtgeni olur. Ayrıca bu kirişler dörtgeninde köşegenler eşit uzunlukta olduğu için  $AM \parallel BN$  veya  $BM \parallel AN$  dir. Birinci durumda

$$m(\widehat{AMD}) = m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{AMB})$$

ve ikinci durumda ise

$$m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{MBA})$$

olur. Birinci durumda  $m(\widehat{AMB}) + m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$  olur ve buradan  $M$  nin  $AC$  köşegeni üzerinde olduğu çıkar. Benzer şekilde ikinci durumda ise  $M$  nin  $BD$  köşegeni üzerinde olur. Diğer taraftan,  $M$  nin herhangi bir köşegen üzerinde olduğu durumda  $m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{BMC}) = 180^\circ$  olacağı açıktır. Sonuç olarak istenilen noktaların geometrik yeri  $ABCD$  nin köşegenleridir.

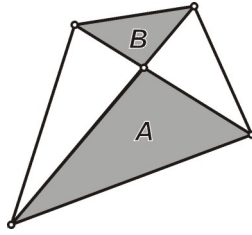


---

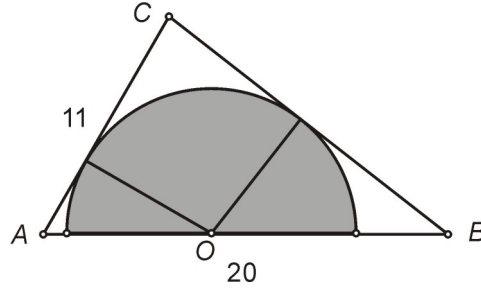
## GEOMETRİ-PROBLEMLER

---

1.  $ABCD$  kirişler dörtgeninde  $AC$  köşegeni  $\widehat{DAB}$  açısının açı ortayıdır. Bu dörtgende  $AD$  kenarı  $D$  noktasının ötesindeki bir  $E$  noktasına uzatılıyor. Bu durumda  $|CE| = |CA|$  eşitliğinin ancak ve ancak  $|DE| = |AB|$  eşitliği sağlandığında doğru olduğunu gösteriniz.
2. Köşegenlerle dört üçgene bölünmüş olan bir yamuğun paralel kenarlarına komşu olan üçgenlerin alanlarına  $A$  ve  $B$  diyelim. Bu durumda yamuğun alanını  $A$  ve  $B$  cinsinden bulunuz.

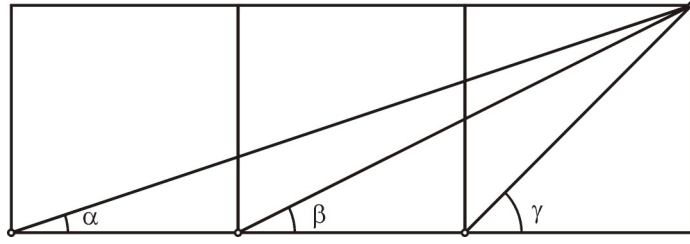


3. Şekildeki gibi bir  $ABC$  üçgeninde  $|AB| = 20$  cm,  $|AC| = 11$  cm ve  $|BC| = 13$  cm dir.  $ABC$  üçgeni içine merkezi  $|AB|$  kenarı üzerinde yer alan bir yarım daire çiziliyor. Yarım daire  $|AC|$  ve  $|CB|$  kenarlarına teğet olduğuna göre yarı çemberin çapı kaç cm dir?

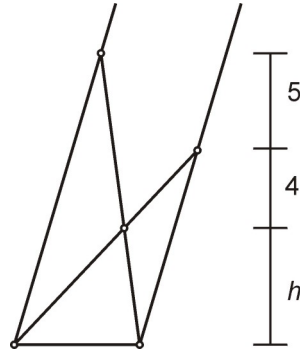


4.  $|BC| = 7$ ,  $|AC| = 3$  ve  $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$  olan bir  $ABC$  üçgeninde  $|AB|$  kaçtır ?
5. Merkezi  $S$  ve yarıçapı  $r = 2$  olan bir çemberde,  $45^\circ$  açı ile kesişen iki yarıçap  $SA$  ve  $SB$  verilsin.  $AB$  doğrusu ile  $AS$  doğrusunun  $S$  noktasındaki dikmesi  $K$  noktasında kesişsinler.  $ABS$  üçgeninde  $B$  köşesinden inilen dikme  $AS$  kenarını  $L$  noktasında kessin.  $SKBL$  yamuğunun alanını bulunuz.

6.  $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$  olan bir  $ABC$  dik üçgeninin hipotenüsünün uzunluğu 10 cm,  $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$ 'dir. Üçgenin içinde bir  $D$  noktası,  $m(\widehat{BDC}) = 90^\circ$  ve  $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DBA})$  olacak şekildedir.  $AB$  kenarıyla  $CD$  doğrusunun kesiştiği nokta ise  $E$  noktasıdır. Bu durumda  $|AE|$  doğru parçasının uzunluğu nedir?
7.  $ABCD$  karesinin  $AB$  kenarı üzerinde,  $|AE| = 3|EB|$  olacak şekilde bir  $E$  noktası,  $DA$  kenarı üzerinde ise,  $|AF| = 5|FD|$  olacak şekilde bir  $F$  noktası bulunmaktadır.  $DE$  ve  $FC$  doğru parçalarının kesiştiği nokta  $K$ ,  $DE$  ve  $BF$  doğru parçalarının kesiştiği nokta  $L$ ,  $FB$  ve  $EC$  doğru parçalarının kesiştiği nokta ise  $M$  noktası olsun. Bu durumda  $EML$  ve  $DKC$  üçgenlerinin alanlarının toplamı  $p_1$ ,  $FLK$  ve  $MBC$  üçgenlerinin alanlarının toplamı  $p_2$  ise,  $p_1 : p_2$  oranı nedir?
8.  $ABCD$  paralelkenarında  $\widehat{ADC}$  açısının açıortayı  $BC$  kenarını  $E$  noktasında,  $AD$  kenarını dik kesen ve iki eşit parçaya bölen doğru parçasını  $M$  noktasında kesmektedir. Eğer  $AM$  ve  $BC$  doğruları  $F$  noktasında kesişiyorsa
- (a)  $|DE| = |AF|$   
(b)  $|AD| \cdot |AB| = |DE| \cdot |DM|$
- olduğunu ispatlayınız.
9.  $ABC$  üçgeninde  $m(\widehat{ACB})$  açısının iç açıortayı  $AB$ 'yi  $D$  noktasında kesmektedir. Eğer  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi ile  $BCD$  üçgeninin içteğet çemberinin merkezleri çakışıksa  $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$  olduğunu gösteriniz.
10. Bir  $ABCD$  dörtgeninde  $BC$  ve  $DA$  kenarlarının orta noktaları sırasıyla  $E$  ve  $F$ 'dir.  $EDA$  ve  $FBC$  üçgenlerinin alanları toplamının,  $ABCD$  dörtgeninin alanına eşit olduğunu gösteriniz.
11. Bir  $ABC$  üçgeninde,  $m(\widehat{ABC}) = 2m(\widehat{ACB})$  olduğuna göre,
- (a)  $|AC|^2 = |AB|^2 + |AB| \cdot |BC|$   
(b)  $|AB| + |BC| < 2|AC|$
- olduğunu kanıtlayınız.
12.  $P$  noktası, kenar uzunluğu 10 olan bir eşkenar üçgenin iç bölgesinde yer almaktadır.  $P$  noktasının üçgenin iki kenarına olan dik uzaklıkları 1 ve 3 ise üçüncü kenara olan uzaklığı kaçtır?
13. Şekilde bir dikdörtgen 3 kareye bölünmüştür.  $\alpha + \beta = \gamma$  olduğunu gösteriniz.
14.  $C$  açısı dik olan  $ABC$  üçgeninde  $S$ ,  $AB$  kenarının orta noktası,  $V$  ise  $AB$  kenarına inilen yüksekliğin ayağıdır.  $|SV| = 1$  ve  $|SC| = 2$  ise  $ABC$  üçgeninin açı ölçülerini bulunuz.



15. Bir  $ABC$  üçgeninin  $A$ ,  $B$  ve  $C$  köşelerinden inen dikmelerin uzunlukları sırasıyla, 5, 4 ve 4 dür.  $|BC|$  kenarının uzunluğunu bulunuz.
16. Kenar uzunluğu 2 olan bir  $ABCD$  karesinde  $AD$  'nin orta noktası  $E$  ve  $C$  'den  $BE$  'ye inilen dikmenin ayağı  $F$  dir.  $CDEF$  dörtgeninin alanını bulunuz.
17. Yüksekliklerinden ikisi 5 ve 7 olan bir üçgenin üçüncü yüksekliğinin üst sınırını bulunuz.
18. Bir üçgenin kenarları  $a, b, c$  ve çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu  $R$  olsun. Eğer  $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$  ise üçgenin açılarını bulunuz.
19. İki merdiven, dar bir sokakta orantısız bir  $X$ -şekli biçiminde çaprazlama yerleştirilmiştir. Sokak duvarları zemine dik değil, fakat birbirlerine paraleldir. Zemin, düz ve yataydır. Her bir merdivenin tabanı, karşı duvara değecek şekilde yerleştirilmiştir. Uzun olan merdivenin sokak duvarına değen üst kısmı ile kısa olan merdivenin karşı duvara değen üst kısmı arasındaki mesafe dikey olarak 5 m 'dir. Kısa olan merdivenin karşı duvara değen üst kısmı ile de, iki merdivenin kesiştikleri nokta arasındaki mesafe dikey olarak 4 m 'dir. Merdivenlerin kesişim noktasının yere olan yüksekliği dikey olarak ne kadardır?



20.  $ABC$  üçgeninde,  $D$  noktası  $[AC]$  üzerinde olmak üzere  $[BD]$  ve  $E$  noktası  $[AB]$  üzerinde olmak üzere  $[CE]$  doğru parçaları çiziliyor.  $[BD]$  ve  $[CE]$  nin kesişim noktası  $X$ ,  $\text{Alan}(BXE) = a$ ,  $\text{Alan}(BXC) = b$  ve  $\text{Alan}(CXD) = c$  olmak üzere  $\text{Alan}(AEXD)$  yi  $a, b$  ve  $c$  cinsinden bulunuz.

21. Kenar uzunlukları 10, 17 ve 21 olan bir üçgenin içine bir kenarı üçgenin en uzun kenarında ve diğer iki köşesi üçgenin kısa kenarları üzerinde olacak şekilde bir kare yerleştiriliyor. Karenin kenar uzunluğunu bulunuz.
22.  $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB})$  ve  $|AB| = |AD|$  olacak şekilde bir dışbükey  $ABCD$  dörtgeni verilsin.  $A$  noktasından  $CB$  ve  $DB$  doğrularına çizilen dikmelerin kesişim noktaları sırasıyla  $N$  ve  $K$  olmak üzere  $NK$  doğrusunun  $AC$  doğrusuna dik olduğunu gösteriniz.
23. Bir  $ABCD$  karesinin  $BC$  ve  $CD$  kenarlarından  $K$  ve  $L$  noktaları alınıyor.  $m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{AKL})$  olduğuna göre  $m(\widehat{KAL})$  kaçtır ?
24. Kenarları  $a, b$  ve  $c$  olan bir diküçgenin kenarları geometrik bir dizi oluşturduğuna ve  $abc = 1$  olduğuna göre  $a, b, c$  yi bulunuz.
25.  $ABC$  dik üçgeninde  $AB$  hipotenüsünün orta noktası  $K$  olsun.  $M, BC$  kenarı üzerinde  $|BM| = 2|MC|$  olacak şekilde bir nokta ise  $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MKC})$  olduğunu gösteriniz.
26. Bir yamuğun orta tabanının uzunluğu 4 ve taban açıları  $40^\circ$  ve  $50^\circ$  'dir. Alt ve üst tabanın orta noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu 1 ise taban uzunluklarını hesaplayınız.
27.  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberi  $BC$  kenarına  $M$ ,  $CA$  kenarına  $N$ ,  $AB$  kenarına ise  $P$  noktalarında teğettir.  $NP$  doğrusu üzerinde  $\frac{|DP|}{|DN|} = \frac{|BD|}{|CD|}$  olmak üzere bir  $D$  noktası olduğuna göre  $DM \perp PN$  olduğunu gösteriniz.
28.  $M$  noktası,  $ABCD$  karesinin çevrel çemberindeki  $CD$  yaylarından kısa olanının üzerinde bir nokta olsun.  $P$  ve  $R$  noktaları sırasıyla  $AM$  doğrusuyla  $BD$  ve  $CD$  doğru parçalarının kesişimlerini gösterebilir. Benzer şekilde,  $Q$  ve  $S$  noktaları da  $BM$  doğrusu ile sırasıyla  $AC$  ve  $DC$  doğru parçalarının kesişim noktaları olsunlar.  $PS$  ve  $QR$  doğrularının birbirlerine dik olduklarını gösteriniz.
29. Boyutları  $25 \times 36 \times 12$  olan ve yerde en büyük yüzlerinden birisi üzerinde duran bir kutunun alt köşelerinin birinde bulunan bir karınca, kutunun altından geçmeden, karşı çaprazdaki alt köşeye ulaşmaya çalışmaktadır. Karıncanın kullanabileceği en kısa yolun uzunluğu nedir?
30. Merkezleri  $O$  ve  $P$  olan iki tane daire alalım. Her bir dairenin merkezinden, diğer dairenin çevresine iki tane teğet çizelim.  $O$  merkezli daireden çizilen teğetler,  $O$  merkezli daireyi  $A$  ve  $B$  noktalarında;  $P$  merkezli daireden çizilen teğetler de,  $P$  merkezli daireyi  $C$  ve  $D$  noktalarında kessin.  $AB$  ve  $CD$  kirişlerinin eşit uzunlukta olduklarını gösteriniz.

31. Bir  $ABCD$  dörtgeninde,  $Alan(ABC) \leq Alan(BCD) \leq Alan(CDA) \leq Alan(DAB)$  ise  $ABCD$  nin bir yamuk olduğunu kanıtlayınız.
32. Köşegenlerin kesişimi  $O$  olan  $ABCD$  paralelkenarında,  $M$  ve  $N$  noktaları sırasıyla  $[BO]$  ve  $[CD]$  nin orta noktaları olsunlar.  $ABC$  ve  $AMN$  üçgenleri benzer ise,  $ABCD$  nin bir kare olduğunu kanıtlayınız.
33. Bir düzgün dokuzgenin en uzun köşegeninin uzunluğunun, en kısa köşegeni ile bir kenarının uzunlukları toplamına eşit olduğunu gösteriniz.
34. Kenarları 20 ve 15 olan bir  $ABCD$  dikdörtgeni verilsin. Merkezi  $A$  noktasında olan bir çember  $C$  köşesinden geçiyor.  $BD$  doğru parçasını içeren kirişin uzunluğunu bulunuz.
35. Yarı çapı  $r$  olan bir çemberle çevrelenmiş ve alanı  $3r^2$  olan düzgün çokgenin kenar sayısı nedir?
36.  $ABC$  dar açılı üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $O$  olsun.  $O_1$  ise  $AB$  kenarını iki eşit parçaya ayıran ve  $O$  noktasından geçen doğrunun üzerinde,  $O$  noktasına göre  $AB$  kenarının diğer tarafında kalan bir nokta olsun. Merkezi  $O_1$ , yarı çapı  $AO_1$  olan çembere  $K$ ,  $CA$  ve  $CB$  doğrularının  $K$  ile kesiştiği noktalara ise sırasıyla  $A_1$  ve  $B_1$  diyelim. Bu durumda  $A_1B$  ve  $AB_1$  doğruları  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin üzerinde kesiştiğinde  $AO_1BO$  dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olduğunu gösteriniz.
37.  $P$  noktası bir çember üzerinde,  $Q$  noktası bir doğru üzerinde sabit;  $R$  noktası ise  $P$  noktasının bulunduğu çember üzerinde ( $P, Q, R$  bir doğru üzerinde olmayacak şekilde) değişken bir noktadır.  $P, Q$  ve  $R$  noktalarından geçen çember,  $Q$  noktasının bulunduğu doğruyu tekrar  $V$  noktasında kestiğine göre,  $VR$  doğrusunun bir sabit noktadan geçtiğini gösteriniz.
38.  $ABCD$ , bir kirişler dörtgeni olsun.  $AC$  köşegeni  $DAB$  açısının açıortayıdır.  $AD$  kenarı,  $D$  köşesinden uç noktası  $E$  olacak şekilde uzatılıyor.  $|CE| = |CA| \Leftrightarrow |DE| = |AB|$  olduğunu ispatlayınız.
39. Alanı 7 olan bir  $ABC$  eşkenar üçgeninde  $M$  ve  $N$  noktaları sırasıyla  $AB$  ve  $AC$  üzerinde bulunan ve  $AN = BM$  koşulunu sağlayan noktalar olsun.  $O = BN \cap CM$  olmak üzere,  $BOC$  üçgeninin alanı 2 olsun.
- a)  $MB : AB = 1 : 3$  veya  $MB : AB = 2 : 3$  olduğunu ispatlayınız.
- b)  $AOB$  açısının ölçüsünü bulunuz.

40. Bir  $ABC$  üçgeninde  $a, b$  ve  $c$  sırasıyla  $A, B$  ve  $C$  köşelerinin karşısındaki kenarların uzunlukları ve  $r$ ,  $ABC$  üçgeninin içteğet çemberinin yarı çapı olmak üzere ve  $6(a + b + c)r^2 = abc$  eşitliğini sağlamaktadırlar.  $M$ ,  $ABC$  üçgeninin içteğet çemberinin üzerinde bir nokta ve  $D, E, F$  sırası ile bu noktanın  $BC, AC$  ve  $AB$  kenarlarına izdüşümleridir.  
 $Alan(ABC) = S$  ve  $Alan(DEF) = S_1$  ise  $\frac{S_1}{S}$  kesirinin alacağı en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.
41. Bir  $ABC$  üçgeninin alanını eşit alanlı  $ABM, BCM$  ve  $MCA$  üçgenlerine bölen  $M$  noktasının ağırlık merkezi olduğunu ispatlayınız.
42. Bir  $ABC$  üçgeninde  $m(\widehat{B}) = 2.m(\widehat{C})$  ve  $A$  açısının açıortayı  $BC$  kenarını  $D$  noktasında kesmek üzere  $|AB| = |CD|$  ise  $m(\widehat{A})$  kaçtır?
43.  $ABCD$  eşkenar dörtgen ve  $m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$  olsun.  $K$  ve  $L$  noktaları  $AD$  ve  $DC$  kenarları üzerinde noktalar ve  $M$  noktası  $KDLM$  paralel kenar oluşturacak şekilde  $AC$  köşegeni üzerinde bir nokta olsun.  $BKL$  üçgeninin eşkenar olduğunu ispatlayınız.
44.  $ABC$  dik üçgeninde  $D$  ve  $E$  sırası ile  $AB$  ve  $BC$  dik kenarları üzerinde  $m(\widehat{BAE}) = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{BDC}) = 45^\circ$  olacak şekilde noktalar,  $F$  ise  $AE$  ve  $CD$  doğrularının kesişim noktasıdır.  $|AE| = \sqrt{3}$ ,  $|CD| = \sqrt{2}$  olduğuna göre,  $F$  noktasının  $AB$  kenarına olan uzaklığını bulunuz.
45.  $ABCD$  yamuğunda  $AB$  tabanının orta noktası  $M$  'dir.  $E, AC$  köşegeni üzerinde,  $BC$  ve  $ME, F$  noktasında;  $DE$  ve  $AB, H$  noktasında kesişecek şekilde seçilmiş bir noktadır.  $FD$  ve  $AB, G$  noktasında kesişiyor ise  $M$  noktasının  $GH$  nin orta noktası olduğunu gösteriniz.
46.  $P_n$ , çevrel çember yarıçapı 1 olan bir düzgün çokgendir.  $P_n$  'nin alanınının çevresine oranının 0.25 den büyük olduğu en küçük  $n$  değerini bulunuz.
47. Herhangi bir üçgen kendisi ile benzer olan
- (a) 2002
- (b) 2003
- üçgene bölünebilir mi?
48.  $ABC$  üçgeninin içinde bir  $M$  noktası olsun. Bu üçgende  $m(\widehat{BAC}) = 70^\circ$ ,  $m(\widehat{ABC}) = 80^\circ$ ,  $m(\widehat{ACM}) = 10^\circ$  ve  $m(\widehat{CBM}) = 20^\circ$  olduğuna göre  $|AB| = |MC|$  olduğunu gösteriniz.
49.  $ABCD$  dörtgeni  $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BDC}) = 36^\circ$ ,  $m(\widehat{CBD}) = 18^\circ$  ve  $m(\widehat{BAC}) = 72^\circ$  olmak üzere bir dışbükey dörtgendir.  $AC$  ve  $BD$  köşegenlerinin kesiştiği nokta  $P$  olduğuna göre  $\widehat{APD}$  açısının ölçüsünü bulunuz.

50.  $A$  ve  $B$  köşelerinden çizilen kenarortayların dik kesiştiği bir  $ABC$  üçgeninde en kısa kenarın  $AB$  olduğunu ispatlayınız.
51.  $ABC$  üçgeninde  $AB$  kenarının orta noktası  $M$  ve  $ABC$  açısının açıortayının  $AC$  kenarı ile kesiştiği nokta  $D$  olsun.  $MD \perp BD$  ise,  $|AB| = 3|BC|$  olduğunu gösteriniz.
52. Bir  $ABCD$  dörtgeninde  $m(\widehat{CAD}) = 45^\circ$ ,  $m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 15^\circ$  olduğuna göre  $DBC$  açısının değeri nedir?
53. Bir dik üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı  $R$ , iç teğet çemberinin yarıçapı  $r$  olmak üzere

$$R \geq r(1 + \sqrt{2})$$

olduğunu gösteriniz.

54.  $|AC| = 6$ ,  $|BC| = 2$  ve  $m(\widehat{ACB}) = 120^\circ$  olan bir  $ABC$  üçgeninin  $\widehat{ACB}$  açısının açı ortayı  $AB$  kenarıyla  $D$  noktasında kesişiyor. Bu durumda  $CD$  doğru parçasının uzunluğunu bulunuz.
55.  $R$  çevrel çemberin yarıçapı olmak üzere,  $R(b + c) = a\sqrt{bc}$  koşulunu sağlayan  $ABC$  üçgenini bulunuz.
56. Bir kenarı  $\alpha$  olan  $ABC$  eşkenar üçgeninin dışına  $m(\widehat{CAD}) = 90^\circ$  olan  $ACD$  ikizkenar üçgeni çiziliyor. Burada  $DA$  ve  $CB$  kenarları  $E$  noktasında kesiştiğine göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.
- (a)  $\widehat{DBC}$  açısının ölçüsünü bulunuz.
- (b)  $CDE$  üçgeninin alanını  $\alpha$  cinsinden bulunuz.
- (c)  $BD$  doğru parçasının uzunluğunu  $\alpha$  cinsinden bulunuz.
57. Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninde,  $BAC$  açısının açı ortayı,  $B$  köşesinden çizilen yükseklik ve  $AB$  kenarına ait kenar orta dikme bir noktada kesişmelerinin ancak ve ancak  $m(\widehat{A}) = 60^\circ$  olduğu zaman mümkün olduğunu kanıtlayınız.
58. Birim kareye sığabilecek en büyük yarım dairenin alanını bulunuz.
59.  $ABC$ ,  $|AC| = |BC|$  olacak şekilde bir ikizkenar üçgen olsun. Bu üçgenin çevrel çemberinin,  $C$  noktasını içermeyen  $AB$  yayının üzerindeki bir noktaya  $P$  noktası diyelim.  $C$  noktasından  $PB$  doğru parçası üzerine indirilen dikme ayağına ise  $D$  noktası diyelim. Bu durumda,

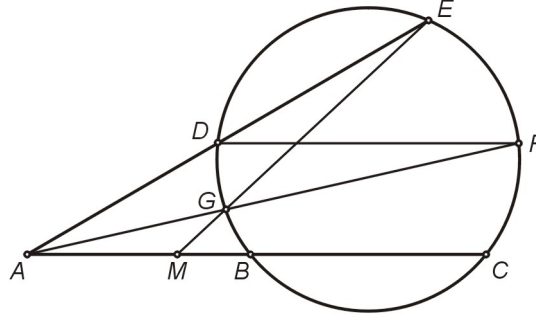
$$|PA| + |PB| = 2|PD|$$

olduğunu gösteriniz.

60. Kenarları  $1, 1, \sqrt{2}$  olan ikizkenar diküçgen biçimindeki bir tahta parçası iki parçaya bölünecektir. İki parçanın alanını eşit yapacak en kısa kesitin yerini ve uzunluğunu ve bulunuz.
61.  $ABC$  ikizkenar üçgeninin, sırasıyla eşkenarlar  $AB$  ve  $AC$  üzerinde  $P$  ve  $Q$  noktaları,  $|AP| = |CQ|$  olacak şekilde bulunmaktadır. Bununla birlikte  $P$  ya da  $Q$ ,  $ABC$  üçgeninin bir köşesi değildir. Bu durumda  $APQ$  üçgeninin çevrel çemberinin  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezinden geçtiğini gösteriniz.
62. Bir  $ABCD$  konveks dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası  $M$  olmak üzere  $AB$  kenarını  $P$  noktasında,  $CD$  kenarını  $Q$  noktasında kesen ve  $M$  noktasından geçen  $g$  doğrusu dikkate alındığında  $APM, BPM, CQM$  ve  $DQM$  üçgenleri benzer olan bütün konveks  $ABCD$  dörtgenleri bulunuz (üçgenlerin köşeleri aynı sırada olmak zorunda değil).
63. Bir çembere dışındaki bir  $A$  noktasından çizilen iki doğru, çemberi sırasıyla  $B, C$  ve  $D, E$  noktalarında kesmektedir. ( $B \in [AC]$  ve  $D \in [AE]$  dir.)  $D$  noktasından  $[BC]$  ye çizilen paralel, çemberi  $F$  noktasında kesmektedir.  $A$  ve  $F$  noktalarından geçen doğrunun çemberi kestiği ikinci nokta  $G$  olsun.  $E, G$  noktalarından geçen doğru,  $[AC]$  yi  $M$  noktasında kestiğine göre

$$\frac{1}{|AM|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$$

olduğunu kanıtlayınız.



64.  $ABC$  bir eşkenar üçgen ve  $P$ , çapı  $BC$  kenarı olan  $A$  köşesinden uzak olan yarımdairedir.  $A$  köşesinden geçen ve  $BC$  yi üç eş parçaya ayıran doğruların  $P$  yarımdairesini de üç eş parçaya ayırdığını gösteriniz.
65. Dikdörtgen şeklindeki bir kağıt, köşegen oluşturan iki köşesi üst üste gelecek şekilde katlanıyor. Kat yerinin oluşturduğu yeni kenarın (üst üste gelen köşelerin karşısındaki



kenar) uzunluğu, dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğuna eşitse dikdörtgenin uzun kenarının kısa kenarına oranı nedir?

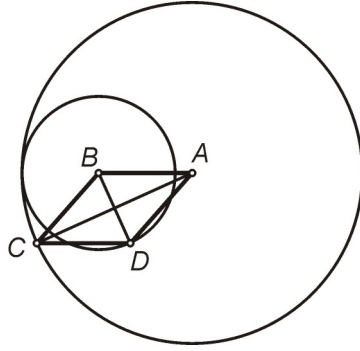
66.  $ABCD$  karesi ile  $ABEF$  karesinin bulunduğu düzlemler birbirlerine diktir.  $AE$  ve  $BF$  doğruları  $O$  noktasında kesişiyor ve  $|AE| = 4$  cm ise

(a)  $B$  noktasından  $DOC$  ve  $DAF$  düzlemlerinin kesiştiği doğruya olan uzaklığını

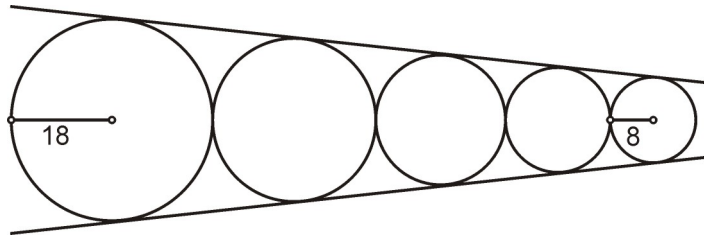
(b)  $AC$  ve  $BF$  doğruları arasındaki uzaklığı

bulunuz.

67. Çevresi  $40$  cm olan  $ABCD$  eşkenar dörtgenininin  $A$  köşesini merkez olarak alan çember  $C$ ,  $B$  köşesini merkez olarak alan çember ise  $D$  noktasından geçmektedir. Bu iki çember birbirlerine teğet ise,  $ABCD$  eşkenar dörtgeninin alanı kaç  $cm^2$ dir?

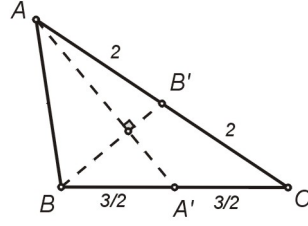


68. Değişik boyutlardaki beş bilye konik biçimindeki bir huniye koyuluyor. Her bilye bitişiğindeki bilyelerle ve huni yüzeyiyle temas halindedir.



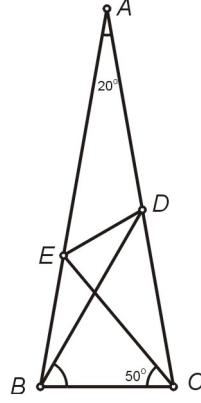
En küçük bilyenin yarıçapı  $8$ , en büyük bilyenin yarıçapı  $18$  milimetredir. Ortadaki bilyenin yarıçapını bulunuz.

69.  $ABC$  üçgeninin  $AA'$  ve  $BB'$  kenarortaylarının dik kesiştiklerini varsayalım.  $|BC| = 3$  ve  $|AC| = 4$  ise,  $AB$  kenarının uzunluğu ne olur?

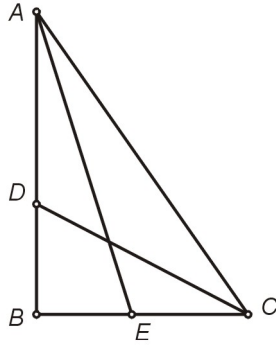


70.  $|AB| = |AC|$  ve  $m(\widehat{BAC}) = \alpha$  olan bir  $ABC$  üçgeninde  $P$ ,  $P \neq B$  olan  $|AB|$  üzerinde bir nokta ve  $Q$ ,  $A$  dan çizilen yükseklik üzerinde  $|PQ| = |QC|$  olacak şekilde bir nokta olsun.  $m(\widehat{QPC})$  kaçtır ?
71. **a** Kenarı  $a$  olan  $ABC$  eşkenar üçgeni veriliyor.  $MP \perp AB$ ,  $NM \perp BC$ ,  $PN \perp AC$  olmak üzere  $P \in [AB]$ ,  $M \in [BC]$ ,  $N \in [AC]$  noktalarının oluşturduğu  $MNP$  üçgeni için  $MP$  uzunluğunu bulunuz.
- b** Her  $ABC$  dar açılı üçgeni için  $MP \perp AB$ ,  $NM \perp BC$ ,  $PN \perp AC$  olacak şekilde  $P \in [AB]$ ,  $M \in [BC]$ ,  $N \in [AC]$  noktalarının bulunabileceğini gösteriniz.
72.  $BAC$  açısı sabit kalmak üzere,  $B$  ve  $C$  noktaları sabit,  $A$  noktası değişkendir. Burada  $AB$  ve  $AC$  kenarlarının orta noktaları sırasıyla  $D$  ve  $E$  noktaları olsun. Ayrıca  $DF \perp AB$ ,  $EG \perp AC$  ve  $BF$  ile  $CG$  doğruları  $BC$  doğrusuna dik olacak şekilde  $F$  ve  $G$  noktaları olsun. Bu durumda  $|BF| \cdot |CG|$  çarpımının  $A$  noktasının seçiminden bağımsız olduğunu gösteriniz.
73. Bir dikdörtgenin kenarları oranı  $12 : 5$  tir. Köşegenlerin oluşturduğu 4 üçgenden bir kenarı komşu olanların içine çizilen çemberlerin yarıçapları  $r_1$  ve  $r_2$  olmak üzere  $r_1 : r_2$  oranını bulunuz.
74. Çapı  $\overline{AB}$  merkezi  $S$  olan yarıçember üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan  $C$  ve  $D$  noktaları verilsin.
- i**  $C$  noktası  $AD$  yayı üzerindedir,
- ii**  $CSD$  açısı dik açıdır.
- $E$  noktası  $AC$  ve  $BD$  doğrularının kesişim noktası ve  $F$  noktası  $AD$  ve  $BC$  doğrularının kesişim noktası ise  $|EF| = |AB|$  olduğunu gösteriniz.
75. Bir üçgenin içindeki noktalardan kenara uzunlukları çarpımı en büyük noktanın ağırlık merkezi olduğunu gösteriniz.

76.  $|AB| = |BC|$  ve  $|CD| = |DA|$  olan  $ABCD$  dörtgeninin  $AC$  ve  $BD$  köşegenlerinin kesiştiği nokta  $O$  noktası olsun. Ayrıca,  $ABD$  üçgeninin  $D$  köşesinden inen yüksekliğin ayağına  $N$ ,  $BCD$  üçgeninin  $B$  köşesinden inen yüksekliğin ayağına  $K$  noktası diyelim. Bu durumda  $N$ ,  $O$  ve  $K$  noktalarının bir doğru üzerinde olduğunu gösteriniz.
77.  $ABC$  ikizkenar ( $|AB| = |AC|$ ) üçgeninde  $m(\widehat{BAC}) = 20^\circ$  dir .  $D$  noktası  $AC$  kenarının üzerinde,  $E$  noktası  $AB$  kenarının üzerinde,  $m(\widehat{DBC}) = 60^\circ$  ve  $m(\widehat{ECB}) = 50^\circ$  olduğuna göre  $m(\widehat{EDB})$  yi bulunuz.



78.  $AC$  kenarı,  $ABC$  dik üçgeninin hipotenüsüdür.  $D$  noktası  $AB$  kenarının ve  $E$  noktası da  $BC$  kenarının üzerindedir.  $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DCA})$  ve  $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EAC})$  dir.  $AE$  kenarının uzunluğu 9 ve  $CD$  kenarının uzunluğu  $8\sqrt{2}$  olduğuna göre  $AC$  kenarının uzunluğunu bulunuz.



79.  $A, B$  ve  $C$  birbirlerine olan uzaklıkları eşit olan ( $|AB| = |AC| = |BC|$ ) üç şehirdir.  $A$  şehrinden 3 km,  $B$  şehrinden 4 km uzakta olan bir aracın  $C$  şehrine olan uzaklığı en çok kaç kilometre olabilir?
80. Bir Kenarı 6 olan eşkenar üçgenin içine çizilen çember üzerindeki herhangi bir  $T$  noktası için  $|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = 45$  olduğunu gösteriniz.

81.  $ABCD$  yamuğunda köşegenler  $O$  noktasında dik olarak kesişmektedir.  $M$  ve  $N$ , sırasıyla  $OA$  ve  $OB$  doğru parçaları üzerinde  $m(\widehat{ANC}) = m(\widehat{BMD}) = 90^\circ$  olacak şekilde noktalardır.  $E$ ,  $MN$  doğru parçasının orta noktası ise

(a)  $OMN$  ve  $OBA$  üçgenlerinin benzer üçgenler olduklarını

(b)  $OE$  doğru parçasının  $AB$  'ye dik olduğunu

gösteriniz.

82.  $G$  kapalı dörtgeni için

(a) Eğer üzerinden geçen her doğrunun  $G$  'yi eşit iki alana ayırdığı bir  $X$  noktası varsa  $G$  bir paralelkenardır.

(b) Eğer  $G$  bir paralelkenarsa, üzerinden geçen her doğrunun  $G$  'yi eşit iki alana ayırdığı bir  $X$  noktası vardır.

önermelerini ispatlayınız.

83.  $ABC$  dik üçgeninde  $|AB| = |AC|$ .  $[AB]$  üzerinde  $|AM| = |BP|$  olacak şekilde  $M$  ve  $P$  noktaları alalım.  $D$  noktası da  $[BC]$  nin orta noktası olmak üzere,  $[CM]$  ve  $[BC]$  üzerinde sırasıyla  $R$  ve  $Q$  noktaları,  $A, R, Q$  doğrusal ve  $AQ$  ile  $CM$  dik olacak şekilde alınmıştır.

a-)  $m(\widehat{AQC}) = m(\widehat{PQB})$

b-)  $m(\widehat{DRQ}) = 45^\circ$

olduğunu ispatlayınız.

84.  $ABC$  üçgeninin  $BC$  kenarının üzerindeki  $D$  ve  $E$  noktaları, ( $D$ ,  $B$ 'ye daha yakın);  $AC$  kenarının üzerindeki  $F$  ve  $G$  noktaları, ( $F$ ,  $C$ 'ye daha yakın);  $AB$  kenarının üzerindeki  $H$  ve  $K$  noktaları, ( $H$ ,  $A$ 'ya daha yakın) verilmiştir.  $|AH| = |AG| = 1$ ,  $|BK| = |BD| = 2$ ,  $|CE| = |CF| = 4$ ,  $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$  olup  $D, E, F, G, H, K$  noktaları bir çember üzerindedir. Buna göre  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberinin yarı çapını bulunuz.

85. Köşeleri  $r$  yarıçaplı bir çemberin üzerinde olan tüm  $ABCD$  dörtgenlerini ve  $|CB| = |BP| = |PA| = |AB|$  olacak şekilde  $[CD]$  kenarı üzerinde bir  $P$  noktası düşünelim.

a) Yukarıdaki koşulu sağlayan  $A, B, C, D, P$  noktalarının varlığını gösteriniz.

b) Yukarıdaki koşulu sağlayan tüm  $A, B, C, D, P$  noktaları için  $|DA| = |DP| = r$  olduğunu kanıtlayınız.

86.  $ABC$  üçgeni,  $A$  noktasında dik açıdır.  $D$  noktası,  $CD = 1$  olacak şekilde  $AB$  kenarının üzerindedir.  $AE$ ,  $A$  noktasından  $BC$  kenarına olan dik yüksekliktir.  $BD = BE = 1$  ise,  $AD$  kenarının uzunluğu nedir?

87.  $|AB| = |AC|$  olacak şekilde bir  $ABC$  üçgeninde  $D$ ,  $A$  köşesinden inilen dikmenin ayağıdır.  $E$  noktası ise  $AB$  kenarı üzerinden bir nokta,  $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ECB}) = 18^\circ$  ve  $|AD| = 3$  ise  $|CE| = ?$
88. Eşkenar üçgenin içindeki bir noktanın köşelere uzaklıkları 3, 4 ve 5 ise üçgenin alanını bulunuz.
89. Kenar uzunlukları ve içteğەر çemberinin çapı aritmetik dizi oluşturan üçgenin diküçgen olduğunu ispatlayınız.
90.  $\widehat{pOq}$  açısı içinde yer alan  $S$  noktası,  $Op$  doğrusuna  $P$  noktasında,  $Oq$  doğrusuna ise  $Q$  noktasında teğet olan bir  $k$  çemberinin üzerinde bulunmaktadır.  $Op$  doğrusuna paralel olan ve  $S$  noktasından geçen  $s$  doğrusu ise  $Oq$  doğrusunu  $R$  noktasında kesmektedir.  $T$  noktası ise  $SQR$  üçgeninin çevrel çemberi ile  $PS$  doğrusunun kesiştiği noktadır ( $T \neq S$ ). Bu durumda  $OT // SQ$  olduğunu ve  $OT$  doğrusunun  $SQR$  üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.
91.  $ABCD$  dört yüzlünün ağırlık merkezi ile  $A$  ve  $B$  köşeleri arasındaki uzaklık eşit olduğuna göre
- $$|AC|^2 + |AD|^2 = |BC|^2 + |BD|^2$$
- olduğunu gösteriniz.
92.  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberi  $BC$ ,  $CA$  ve  $AB$  kenarlarına sırasıyla  $A_1$ ,  $B_1$  ve  $C_1$  noktalarında değiyor. Bu durumda  $A_1B_1C_1$  üçgeninin açılarını  $ABC$  üçgeninin açıları cinsinden ifade ediniz.
93.  $p$  ve  $q$  yarıdoğruları  $O$  noktasında kesişiyorlar.  $A$  ve  $C$  noktaları  $p$  üzerinde,  $B$  ve  $D$  noktaları  $q$  üzerinde olmak üzere,  $CD$  doğrusu  $OAB$  üçgeninin  $A$  köşesinden çizilen kenarortayına paralel olduğuna göre  $AB$  kenarının  $OCD$  üçgeninin  $D$  köşesinden çizilen kenarortayına paralel olduğunu gösteriniz.
94. Bir  $ABC$  üçgeninde,  $|AB| = |AC|$ ,  $D$  noktası  $[BC]$  nin orta noktası olsun.  $M$ ,  $[AD]$  nin orta noktası ve  $N$  noktası  $D$  noktasının  $[BM]$  üzerindeki dik izdüşümü olmak üzere,  $m(\widehat{ANC}) = 90^\circ$  olduğunu kanıtlayınız.
95.  $ABC$ ,  $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$  ve  $|AB| = |AC|$  olacak şekilde bir üçgen olsun.  $BC$  kenarı üzerindeki  $N$  noktası ise, yine  $BC$  kenarı üzerindeki  $M$  noktası ve  $C$  noktasının arasında olacak şekilde ve

$$|BM|^2 - |MN|^2 + |NC|^2 = 0$$

eşitliğini sağladığına göre,  $m(\widehat{MAN}) = 45^\circ$  olduğunu gösteriniz.

96. Dar açılı  $ABC$  üçgeninin  $AC$  ve  $BC$  kenarlarının dış tarafında  $ACXE$  ve  $CBDY$  kareleri bulunmaktadır. Bu durumda  $AD$  ve  $BE$  doğrularının kesiştiği noktanın,  $ABC$  üçgeninin  $C$  noktasından inen yüksekliği üzerinde olduğunu gösteriniz.
97. Bir dışbükey  $ABCD$  dörtgeninin iç teğet çemberinin merkezi  $I$  olsun.  $m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{ABC})/2$  olacak şekilde,  $[AI]$  ve  $[CI]$  doğru parçaları üzerinde, sırasıyla,  $M$  ve  $N$  noktaları seçilsin.  $m(\widehat{MDN}) = m(\widehat{ADC})/2$  olduğunu kanıtlayınız.
98. Kenar uzunlukları  $a, b, c$  br olan bir üçgende  $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$  olduğunu kanıtlayınız.
99. Kare şeklindeki tarlanın içine yerleştirilmiş bir karınca, tarlanın köşelerinin birinden 13 metre, bu köşenin çapraz olarak karşısındaki köşeden 17 metre ve üçüncü bir köşeden de 20 metre uzaklıktadır. Tarlanın alanını bulunuz. Burada, arazinin düzgün olduğu varsayılmaktadır.
100. İkizkenar bir  $ABC$  üçgeninin ( $|AB| = |AC|$ )  $AB$  kenarı üzerinde  $BCD$  açısı  $15^\circ$  olacak şekilde bir  $D$  noktası yer almaktadır.  $|AD| = 1$  birim ve  $|BC| = \sqrt{6}$  birim ise  $CAB$  açısının ölçüsü kaç derecedir?
101.  $n \geq 4$  olmak kaydıyla, her pozitif  $n$  tam sayısı için, herhangi bir üçgenin  $n$  ikizkenar üçgene ayrılabilirliğini gösteriniz.
102.  $ABC$  üçgeninin yükseklikleri  $h_a \geq 3$  cm,  $h_b \geq 4$  cm ve  $h_c \geq 5$  cm eşitsizliklerini sağladığına göre, bu üçgeninin alanının mümkün olan en küçük değerini bulunuz.
103.  $ABC$  üçgeninde  $A$  açısının açıortayı,  $ABC$  üçgeninin çevrelçemberi ile  $A_1$  noktasında kesişiyor. Aynı şekilde  $B$  açısının açıortayı çevrelçemberi  $B_1$  noktasında,  $C$  açısının açıortayı da  $C_1$  noktasında kesiyor.  $AA_1$  doğrusu  $B$  ve  $C$  köşelerindeki dış açılarının açıortayları ile  $A^\circ$  noktasında kesişiyor.  $B^\circ$  ve  $C^\circ$  noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor.

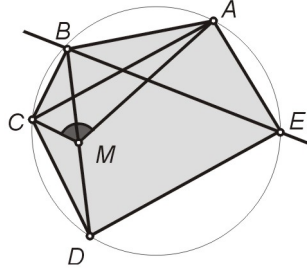
$$\begin{aligned} \text{Alan}(A^\circ B^\circ C^\circ) &= 2 \cdot \text{Alan}(AC_1BA_1CB_1) \\ &\geq 4 \cdot \text{Alan}(ABC) \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

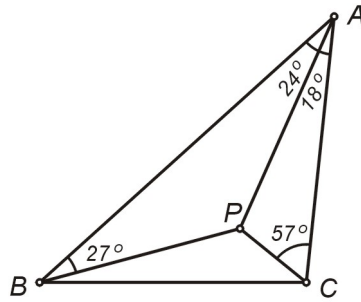
104.  $AC$  kenarı  $AB$  kenarından uzun olan bir  $ABC$  üçgeni verilsin.  $BX = CA$  olacak şekilde  $BA$  kenarını  $A$  yönünde uzatalım.  $CY = BA$  olacak şekilde  $CA$  kenarı üzerinde  $Y$  noktasını alalım.  $BC$  kenarının orta dikmesinin  $XY$  doğrusu ile kesiştiği yere  $P$  diyelim.  $m(\widehat{BPC}) + m(\widehat{BAC}) = 180^\circ$  olduğunu gösteriniz.
105.  $ABC$  ikizkenar ( $|AB| = |AC|$ ) üçgeni veriliyor.  $B \in |MC|$  olacak şekilde bir  $M$  noktası seçiliyor.  $AMB$  üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı ile  $AMC$  üçgeninin

$M$  köşesine karşılık gelen dış teğet çemberinin yarıçapı toplamının sabit olduğunu ispatlayınız.

106.  $ABC$  dar açılı bir üçgendir.  $BC$  kenarı üzerinde bir  $D$  noktası alalım.  $E$  ve  $F$  noktaları da sırasıyla,  $D$  noktasının  $AB$  ve  $AC$  kenarlarına dik izdüşümü olsun.  $BF$  ve  $CE$  doğrularının kesiştiği noktaya da  $P$  diyelim.  $AD$  doğrusunun  $BAC$  üçgeninin açıortayı olmasının ancak ve ancak  $AP$  ve  $BC$  doğrularının birbirine dik olması durumunda olduğunu gösteriniz.
107. İki benzer üçgenin tam sayı değerli kenar uzunluklarının ikisi birbirine eşit olsun. Üçüncü kenarlarının farkı 20141 ise, bütün kenarlarını bulunuz.
108. Köşeleri bir çemberin üzerinde bulunan  $ABCDE$  beşgeninde,  $AC \parallel DE$  ve  $M$ ,  $BD$  doğru parçasının orta noktasıdır.  $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BMC})$  olduğunda  $BE$  nin  $AC$  yi iki eşit parçaya ayırdığını gösteriniz.



109.  $ABC$  üçgeni,  $A$  noktasında dik açı olsun.  $A$  köşesinden çizilen açıortay  $BC$  kenarını,  $D$  noktasında kessin. Dolayısıyla,  $s(\widehat{DAB}) = 45^\circ$  olur.  $|CD| = 1$  ve  $|BD| = |AD| + 1$  ise,  $AC$  ve  $AD$  uzunluklarını bulunuz.
110.  $ABC$  üçgeni içerisinde  $PAC$  açısı  $18^\circ$ ,  $PCA$  açısı  $57^\circ$ ,  $PAB$  açısı  $24^\circ$  ve  $PBA$  açısı  $27^\circ$  olacak şekilde bir  $P$  noktası olduğuna göre,  $ABC$  üçgeninin ikizkenar olduğunu gösteriniz.



111. Dar açılı bir üçgenin iç açılarını  $A, B$  ve  $C$  ile gösterelim.

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B + \sin C &> 2 \\ \cos A + \cos B + \cos C &> 1 \\ \tan\left(\frac{A}{2}\right) + \tan\left(\frac{B}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right) &< 2\end{aligned}$$

eşitsizliklerini gösteriniz.

112. Bir  $ABC$  üçgeninde  $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$  ve  $|AB| \neq |AC|$  olsun. Ayrıca  $\widehat{BAC}$  açısının açı ortayı  $AD$  doğrusu ve  $AD$  doğrusuna  $A$  noktasında dik olan  $\epsilon$  doğrusunun  $BC$  ile kesiştiği nokta,  $|BE| = |AB| + |AC|$  şartını sağlayan  $E$  noktası olsun.

Bu durumda  $ABC$  üçgeninin  $\widehat{ABC}$  ve  $\widehat{BCA}$  açılarını bulunuz.

113. Kenar uzunlukları 1, 2, 3 ve 4 birim olan bir dörtgenin alanının en büyük değeri nedir?

114.  $AB$  ve  $CD$  kenarları paralel olan bir  $ABCD$  yamuğunda  $m(\widehat{DAB}) = 6$  ve  $m(\widehat{ABC}) = 42$  dir.  $AB$  kenarında  $m(\widehat{AXD}) = 78$  ve  $m(\widehat{CXB}) = 66$  olacak şekilde bir  $X$  noktası bulunmaktadır.  $|AB|$  ve  $|CD|$  doğru parçaları arasındaki uzaklık 1 ise  $AD + DX - (BC + CX) = 8$  olduğunu gösteriniz.

115. Bir  $ABC$  eşkenar üçgeni verilsin. Ağırlık merkezi  $G$  olsun.  $M$  noktası herhangi bir iç nokta olmak üzere,  $|MG|$  nin orta noktası  $O$  olsun.  $M$  noktasından geçen uç noktaları  $ABC$  üçgeninin kenarları üzerinde olan kenarlara paralel doğru parçaları çizilsin.

a.  $O$  noktasının doğru parçalarının orta noktalarına uzaklıklarının eşit olduğunu gösteriniz.

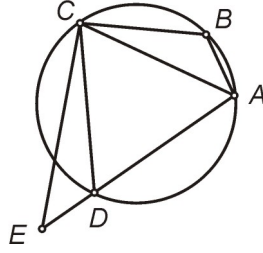
b. Doğru parçalarının orta noktalarının bir eşkenar üçgenin köşeleri olduğunu gösteriniz.



## GEOMETRİ-ÇÖZÜMLER

1.  $ABCD$  kirişler dörtgeninde  $AC$  köşegeni  $\widehat{DAB}$  açısının açı ortayıdır. Bu dörtgende  $AD$  kenarı  $D$  noktasının ötesindeki bir  $E$  noktasına uzatılıyor. Bu durumda  $|CE| = |CA|$  eşitliğinin ancak ve ancak  $|DE| = |AB|$  eşitliği sağlandığında doğru olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**



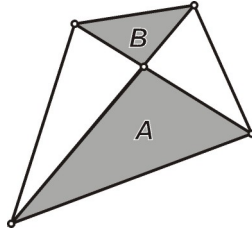
$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAB})$  olduğundan ve çember üzerinde eşit açıların oluşturdukları yayların uzunlukları da birbirine eşit olacağından,  $|BC| = |CD|$  elde ederiz. Ayrıca çemberin içindeki dörtgende karşılıklı açılar toplamı  $180^\circ$  olacağından  $m(\widehat{EDC}) = 180^\circ - m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{ABC})$  buluruz.

$|DE| = |AB|$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda "Kenar-Açı-Kenar"dan dolayı  $ABC$  ve  $EDC$  üçgenleri eş üçgenler olur ve  $|CE| = |CA|$  elde edilir.

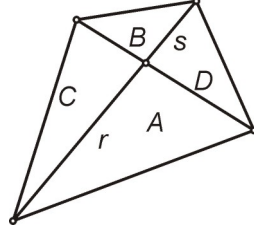
Şimdi  $|CE| = |CA|$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $CAE$  üçgeni ikizkenar üçgen olur ve  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{CEA})$  elde edilir. "Açı-Açı-Açı"dan dolayı  $ABC$  ve  $EDC$  üçgenleri eş üçgenler olur ve  $|DE| = |AB|$  bulunur.

Sonuç olarak bu iki durum birleştirildiğinde,  $|DE| = |AB| \Leftrightarrow |CE| = |CA|$  olduğu görülür.

2. Köşegenlerle dört üçgene bölünmüş olan bir yamuğun paralel kenarlarına komşu olan üçgenlerin alanlarına  $A$  ve  $B$  diyelim. Bu durumda yamuğun alanını  $A$  ve  $B$  cinsinden bulunuz.



**Çözüm.** Sorunun çözümünde üçgenin alanının  $1/2 \times \text{taban} \times \text{yükseklik}$  olduğunu kullanacağız ancak burada unutulmaması gereken konu, tabanın, üçgenin herhangi bir kenarı olabileceği, ve yüksekliğin bu kenarın karşısındaki köşeden, kenarın üzerine (ya da bir uzantısına) indirilen dikme olduğudur.



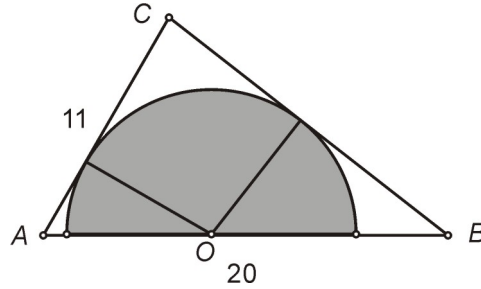
Şimdi, tabanları  $r$  ve  $s$  olan, ve alanları  $C$  ve  $B$  olan üçgenleri düşünelim. Bu iki üçgenin yükseklikleri aynı olduğu gibi tabanları da çakışıktır. Dolayısıyla  $\frac{r}{s} = \frac{C}{B}$  olur. Benzer şekilde  $\frac{r}{s} = \frac{A}{D}$  olur. Bu iki denklemi birleştirerek  $AB = CD$  buluruz.

Ayrıca, alanları  $A + C$  ve  $A + D$  olan üçgenleri düşünersek, bu üçgenler aynı tabana, ve eşit yüksekliğe sahip olduklarından,  $A + C = A + D$ , yani  $C = D$  bulunur.

Bunu daha önce bulduğumuz  $AB = CD$  denkleminde yerine yazarsak,  $C = D = \sqrt{AB}$  elde ederiz.

Sonuç olarak, yamuğun alanı  $A + B + C + D = A + B + 2\sqrt{AB} = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$  olarak bulunur.

3. Şekildeki gibi bir  $ABC$  üçgeninde  $|AB| = 20$  cm,  $|AC| = 11$  cm ve  $|BC| = 13$  cm dir.  $ABC$  üçgeni içersine merkezi  $|AB|$  kenarı üzerinde yer alan bir yarım daire çiziliyor. Yarım daire  $|AC|$  ve  $|CB|$  kenarlarına teğet olduğuna göre yarı çemberin çapı kaç cm dir?



**Çözüm.** Bu problemin çözümünü iki yolla yapabiliriz:

1) Açığortay teoremini kullanarak:

Öncelikle  $|AB|$  doğru parçası üzerindeki yarım dairenin merkezine  $O$ , yarım dairenin  $|AC|$  kenarına teğet olduğu noktaya  $E$ , yarım dairenin  $|CB|$  kenarına teğet olduğu noktaya  $D$  diyelim ve  $|OE|$  ve  $|OD|$  doğru parçalarını çizelim.

$|CE|$  nin  $|CD|$  ye eşit olduğu açıktır. Ayrıca, yarı çap olduklarından,  $|OE|$  ve  $|OD|$  de birbirlerine eşittir. Dolayısıyla  $ODC$  ve  $OEC$  üçgenleri eş üçgenlerdir. O halde  $ACO$  ve  $BCO$  açıları da eşittir. Bu durumda  $OC$ ,  $\widehat{BAC}$  açısının açıortaydır.  $ABC$  üçgeni için açıortay teoremini yazarsak

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AO|}{|BO|}$$

$$\frac{11}{13} = \frac{|AO|}{20 - |AO|}$$

olur. Buradan  $13|AO| = 11(20 - |AO|)$  ve  $|AO| = \frac{55}{6}$  elde edilir.

Şimdi de  $ABC$  üçgenine kosinüs teoremini uygularsak  $13^2 = 11^2 + 20^2 - 2 \cdot 11 \cdot 20 \cdot \cos A$  dan  $\cos A = \frac{4}{5}$  elde edilir. Buradan da  $\sin A = \frac{3}{5}$  olarak bulunur.

$OEA$  üçgeninde  $\sin A = \frac{|OE|}{|AO|}$  olduğundan  $|OE| = \frac{3}{5} \cdot \frac{55}{6} = \frac{11}{2}$  olur. Dolayısıyla yarım dairenin çapı 11 cm bulunur.

2) Üçgenin alanını kullanarak:

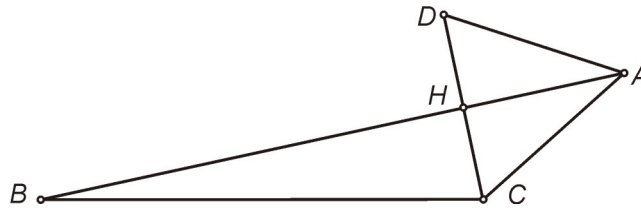
Heron formülünden üçgenin alanı  $\sqrt{22(22 - 11)(22 - 13)(22 - 20)} = 66$  olarak bulunur. Yarım dairenin yarı çapına  $r$  dersek,  $AOC$  üçgeninin alanı  $\frac{11r}{2}$ ,  $BCO$  üçgeninin alanı da  $\frac{13r}{2}$  olur.

$$66 = \frac{11r}{2} + \frac{13r}{2} = 12r$$

Buradan da  $r = \frac{11}{2}$  elde edilir. Dolayısıyla yarım dairenin çapı 11 cm dir.

4.  $|BC| = 7$ ,  $|AC| = 3$  ve  $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$  olan bir  $ABC$  üçgeninde  $|AB|$  kaçtır ?

**Çözüm**  $ABC$  üçgenini şekildeki gibi çizelim ve  $C$  noktasından  $AB$  kenarına inilen dikmenin ayağına  $H$  diyelim.  $C$  noktasının  $H$  ye göre simetiriği  $D$  noktası olsun.  $AHC$  ve  $AHD$  üçgenleri eştir.



$m(\widehat{CAB}) = 30^\circ$  olduğu için  $\widehat{ACH}$  açısı  $60$  derecedir. Yani,  $ACD$  üçgeni eşkenardır. Dolayısıyla,  $|CH| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = \frac{3}{2}$  dir. Pisagor teoreminden

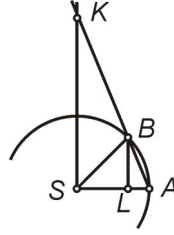
$$|AB| = |AH| + |HB| = \sqrt{|AC|^2 - |CH|^2} + \sqrt{|BC|^2 - |CH|^2}$$

$$= \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{187}{4}} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + \sqrt{187})$$

bulunur.

5. Merkezi  $S$  ve yarıçapı  $r = 2$  olan bir çemberde,  $45^\circ$  açı ile kesişen iki yarıçap  $SA$  ve  $SB$  verilsin.  $AB$  doğrusu ile  $AS$  doğrusunun  $S$  noktasındaki dikmesi  $K$  noktasında kesişsinler.  $ABS$  üçgeninde  $B$  köşesinden inilen dikme  $AS$  kenarını  $L$  noktasında kessin.  $SKBL$  yamuğunun alanını bulunuz.

### Çözüm



$BSL$  açısı  $45^\circ$  olduğu için  $SLB$  üçgeni ikizkenar dik üçgendir.

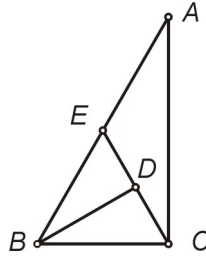
$BS$  yarıçapı 2 olduğu için  $|SL| = |BL| = \sqrt{2}$  dir.

$KSA$  üçgeni  $BLA$  üçgenine benzer olduğu için  $\frac{|KS|}{|SA|} = \frac{|BL|}{|LA|}$  yazılabilir. Buradan  $|KS| = \sqrt{2}(2 + \sqrt{2})$  bulunur.

Sonuç olarak  $SKBL$  yamuğunun alanı  $= \frac{|KS| + |BL|}{2} \cdot |SL| = 3 + \sqrt{2}$  bulunur.

6.  $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$  olan bir  $ABC$  dik üçgeninin hipotenüsünün uzunluğu 10 cm,  $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$ 'dir. Üçgenin içinde bir  $D$  noktası,  $m(\widehat{BDC}) = 90^\circ$  ve  $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DBA})$  olacak şekildedir.  $AB$  kenarıyla  $CD$  doğrusunun kesiştiği nokta ise  $E$  noktasıdır. Bu durumda  $|AE|$  doğru parçasının uzunluğu nedir?

### Çözüm.



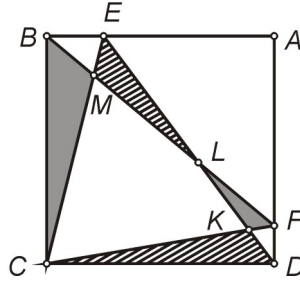
$ABC$  üçgeni bir  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$  üçgeni olduğundan  $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$  olur.  $m(\widehat{ACD}) = \varphi$  olsun. Bu durumda  $m(\widehat{DCB}) = 90^\circ - \varphi$  ve

$$m(\widehat{CBD}) = 180^\circ - m(\widehat{BDC}) - m(\widehat{DCB}) = \varphi$$

bulunur. Şimdi,  $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DBA}) = \varphi$  olduğundan,  $60^\circ = m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{CBD}) = 2\varphi$  yani  $\varphi = 30^\circ$  olarak bulunur. Buradan da  $m(\widehat{CBE}) = 60^\circ$  ve  $m(\widehat{ECB}) = m(\widehat{DCB}) = 90^\circ - \varphi = 60^\circ$  olduğu için,  $EBC$  üçgeninin eşkenar üçgen olduğu görülür. Dolayısıyla,  $|EB| = |BC| = \frac{1}{2}|AB|$  ve  $|AE| = |AB| - |EB| = \frac{1}{2}|AB| = 5 \text{ cm}$ 'dir.

7.  $ABCD$  karesinin  $AB$  kenarı üzerinde,  $|AE| = 3|EB|$  olacak şekilde bir  $E$  noktası,  $DA$  kenarı üzerinde ise,  $|AF| = 5|FD|$  olacak şekilde bir  $F$  noktası bulunmaktadır.  $DE$  ve  $FC$  doğru parçalarının kesiştiği nokta  $K$ ,  $DE$  ve  $BF$  doğru parçalarının kesiştiği nokta  $L$ ,  $FB$  ve  $EC$  doğru parçalarının kesiştiği nokta ise  $M$  noktası olsun. Bu durumda  $EML$  ve  $DKC$  üçgenlerinin alanlarının toplamı  $p_1$ ,  $FLK$  ve  $MBC$  üçgenlerinin alanlarının toplamı  $p_2$  ise,  $p_1 : p_2$  oranı nedir?

**Çözüm.**  $CKLM$  dörtgeninin alanına  $p$  dersek,  $FBC$  üçgeninin alanı  $p_2 + p$  olur.



$FBC$  üçgeninde  $BC$  kenarını taban kabul eden yükseklik ise  $AB$  olduğundan üçgenin alanı aynı zamanda  $\frac{|AB| \cdot |BC|}{2} = \frac{|AB|^2}{2}$  olarak yazılabilir. Buradan da,

$$p_2 = \frac{|AB|^2}{2} - p$$

denklemini bulunur.

Benzer şekilde  $DEC$  üçgeninin alanının  $p_1 + p$  olduğunu görebiliriz. Bu durumda da  $\frac{|DC| \cdot |CB|}{2} = \frac{|AB|^2}{2}$  olduğundan,

$$p_1 = \frac{|AB|^2}{2} - p$$

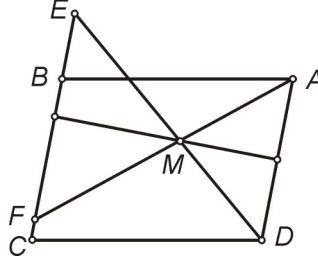
denklemini bulunur. Dolayısıyla  $p_1 : p_2$  oranı 1'dir.

8.  $ABCD$  paralelkenarında  $ADC$  açısının açıortayı  $BC$  kenarını  $E$  noktasında,  $AD$  kenarını dik kesen ve iki eşit parçaya bölen doğru parçasını  $M$  noktasında kesmektedir. Eğer  $AM$  ve  $BC$  doğruları  $F$  noktasında kesişiyorsa

(a)  $|DE| = |AF|$

(b)  $|AD| \cdot |AB| = |DE| \cdot |DM|$

olduğunu ispatlayınız.



- (a)  $AMD$  üçgeninde  $AD$  kenarının kenarortayı bu kenarı dik kestiği için bu üçgen ikizkenardır ve  $|AM| = |MD|$  olur. O halde  $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{ADM})$  'dir.  $BC$  ve  $AD$  paralel doğru parçaları olduğundan  $m(\widehat{MEF}) = m(\widehat{ADM})$  ve  $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{EFM})$  'dir. Buradan  $MEF$  üçgeninin de ikizkenar olduğu bulunur. Yani  $|EM| = |FM|$  'dir.

Buradan

$$|AF| = |AM| + |MF| = |DM| + |ME| = |DE|$$

bulunur.

- (b)  $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{MEF})$  ve  $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{MDA})$  olduğundan  $MAD$  ve  $DEC$  üçgenleri benzer üçgenlerdir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{|DE|}{|DA|} &= \frac{|DC|}{|DM|} \\ |DA| \cdot |DC| &= |DM| \cdot |DE| \end{aligned}$$

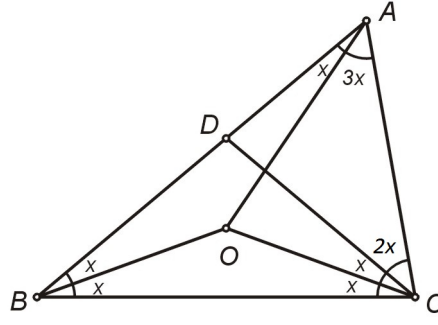
elde edilir.  $|DC| = |BA|$  olduğundan  $|DA| \cdot |BA| = |DM| \cdot |DE|$  bulunur.

9.  $ABC$  üçgeninde  $m(\widehat{ACB})$  açısının iç açıortayı  $AB$ 'yi  $D$  noktasında kesmektedir. Eğer  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi ile  $BCD$  üçgeninin içteğet çemberinin merkezleri çakışıksa  $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$  olduğunu gösteriniz.

### Çözüm.

$A, B, C$  ve  $D$  köşelerini  $O$  noktasıyla birleştirelim.  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $O$  olduğu için  $|AO| = |BO| = |CO|$  olur. Aynı nokta  $DCB$  üçgeninin iç teğet çemberi olduğu için de  $DO, BO$  ve  $CO$  açıortay olur.

$|CO| = |BO|$  olduğundan  $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB})$  olur.  $m(\widehat{OCB}) = x$  diyelim. O halde  $m(\widehat{ABC}) = 2x$ ,  $m(\widehat{BAO}) = x$  olacaktır.  $CO$  ve  $CD$  açıortaylar olduğundan  $m(\widehat{BCD}) = 2x$  ve  $m(\widehat{BCA}) = 4x$  olur.  $|AO| = |CO|$  olduğundan da  $m(\widehat{OAC}) = 3x$  dir. Buradan  $m(\widehat{BAC}) = 4x$  elde edilir.



$ACD$  ve  $ABC$  üçgenlerinde  $\widehat{A_1}-\widehat{A_1}-\widehat{A_1}$  benzerliği vardır. Bu benzerlik kullanılarak

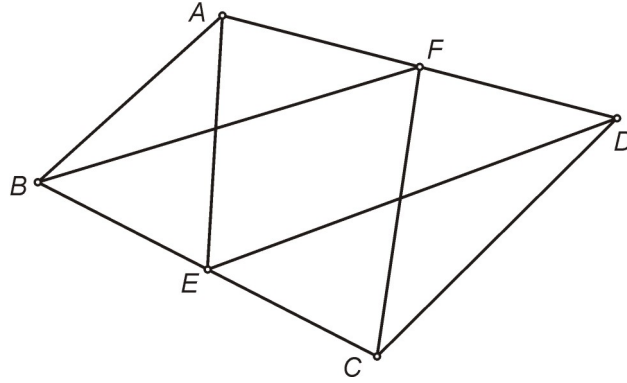
$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$$

bulunur.

10. Bir  $ABCD$  dörtgeninde  $BC$  ve  $DA$  kenarlarının orta noktaları sırasıyla  $E$  ve  $F$  'dir.  $EDA$  ve  $FBC$  üçgenlerinin alanları toplamının,  $ABCD$  dörtgeninin alanına eşit olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**



$DA$  kenarı  $BDA$ ,  $EDA$  ve  $CDA$  üçgenlerinin ortak tabanı ve  $E$ ,  $BC$  kenarının orta noktası olduğu için

$$Alan(EDA) = \frac{1}{2} (Alan(BDA) + Alan(CDA))$$

olur. Benzer şekilde

$$Alan(FBC) = \frac{1}{2} (Alan(ABC) + Alan(DBC))$$

'dir. Her iki eşitliği de taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}
 Alan(EDA) + Alan(FBC) &= \frac{1}{2} (Alan(BDA) + Alan(DBC) + Alan(CDA) + Alan(ABC)) \\
 &= \frac{1}{2} Alan(ABCD) + \frac{1}{2} Alan(ABCD) \\
 &= Alan(ABCD)
 \end{aligned}$$

elde ederiz.

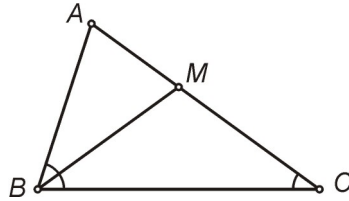
11. Bir  $ABC$  üçgeninde,  $m(\widehat{ABC}) = 2m(\widehat{ACB})$  olduğuna göre,

(a)  $|AC|^2 = |AB|^2 + |AB| \cdot |BC|$

(b)  $|AB| + |BC| < 2|AC|$

olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.** (a)  $[BM]$ , 376.jpg nin açkıortayı olsun. Açıkortay teoreminden  $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AM|}{|MC|}$ , dolayısıyla  $\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AB| + |BC|}$  elde edilir ki bu da bize  $|AM| = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AB| + |BC|}$  verir.



Öte yandan,  $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{ACB})$  olduğu için,  $ABM$  ve  $ACB$  üçgenleri benzerdir. Buradan,  $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AB|}$ , ya da  $|AM| = \frac{|AB|^2}{|AC|}$  bulunur.

Şimdi  $\frac{|AB| \cdot |AC|}{|AB| + |BC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|}$  eşitliği düzenlenirse istenen sonuç elde edilir.

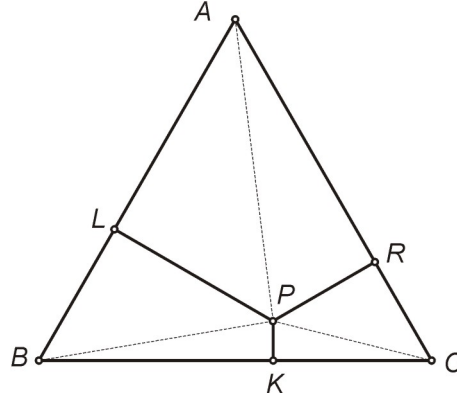
(b)  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı  $R$  ve  $m(\widehat{ACB}) = \alpha$  olmak üzere, sinüs teoremini kullanarak istenilen eşitsizliği elde ederiz:

$$|AB| + |BC| = 2R \sin \alpha + 2R \sin 3\alpha = 2R(\sin \alpha + \sin 3\alpha) = 4R \sin 2\alpha \cos \alpha < 4R \sin 2\alpha = 2|AC|$$

12.  $P$  noktası, kenar uzunluğu 10 olan bir eşkenar üçgenin iç bölgesinde yer almaktadır.  $P$  noktasının üçgenin iki kenarına olan dik uzaklıkları 1 ve 3 ise üçüncü kenara olan uzaklığı kaçtır?

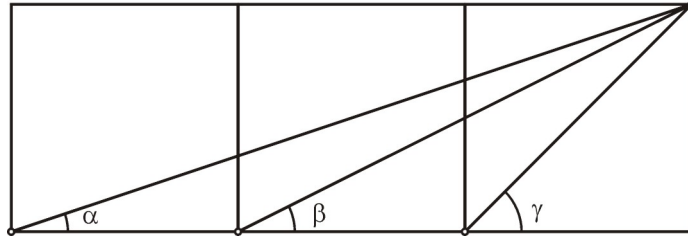
**Çözüm:** Verilen üçgen  $ABC$  üçgeni,  $P$  noktasının  $AB, BC$  ve  $AC$  kenarlarına izdüşümleri de sırasıyla  $L, K$  ve  $R$  olsun.  $PL=1$ ,  $PR=3$  alalım.





$$\begin{aligned}
 \text{Alan}(ABC) &= \text{Alan}(APB) + \text{Alan}(BPC) + \text{Alan}(CPA) \\
 \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} &= \frac{10 \cdot 1}{2} + \frac{10 \cdot |PK|}{2} + \frac{10 \cdot 3}{2} \\
 25\sqrt{3} &= 5 + 5|PK| + 15 \\
 25\sqrt{3} - 20 &= 5|PK| \\
 5\sqrt{3} - 4 &= |PK|
 \end{aligned}$$

13. Şekilde bir dikdörtgen 3 kareye bölünmüştür.  $\alpha + \beta = \gamma$  olduğunu gösteriniz.



**Çözüm:** Şekilden  $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ ,  $\tan(\beta) = \frac{1}{2}$  ve  $\tan(\gamma) = 1$  olduğu kolayca görülebilir. Buradan

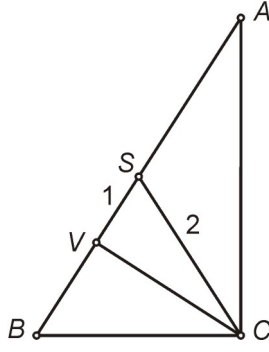
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1 = \tan(\gamma)$$

bulunur.

$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$  ve  $(0, \frac{\pi}{2})$  aralığında tanjant fonksiyonu sürekli artan bir fonksiyon olduğundan elde edilen  $\tan(\alpha + \beta) = \tan(\gamma)$  sonucu  $\alpha + \beta = \gamma$  olduğunu gösterir.

14.  $C$  açısı dik olan  $ABC$  üçgeninde  $S$ ,  $AB$  kenarının orta noktası,  $V$  ise  $AB$  kenarına inilen yüksekliğin ayağıdır.  $|SV| = 1$  ve  $|SC| = 2$  ise  $ABC$  üçgeninin açı ölçülerini bulunuz.

**Çözüm:**



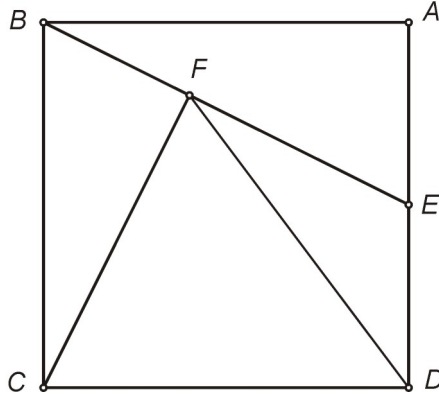
$SVC$  dik üçgeninde  $|SC| = 2|SV|$  'dir. O halde  $m(\widehat{VSC}) = 60^\circ$  olur.  $S$  noktası,  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir. Buradan  $SBC$  üçgeninin ikizkenar olduğu bulunur.  $m(\widehat{SBC}) = \frac{1}{2}(180 - m(\widehat{VSC})) = 60^\circ$ . Buradan da  $m(\widehat{CAB}) = 180 - 90 - 60 = 30^\circ$  elde edilir.

15. Bir  $ABC$  üçgeninin  $A$ ,  $B$  ve  $C$  köşelerinden inen dikmelerin uzunlukları sırasıyla, 5, 4 ve 4 dür.  $|BC|$  kenarının uzunluğunu bulunuz.

**Çözüm:** Üçgenin ikizkenar ve eşit kenarların  $|AB| = |AC|$  olduğu açıktır.  $Alan(ABC) = S$  olsun.  $BC$  nin orta noktası  $P$  olmak üzere  $|AP| \cdot |BC| = S$  veya  $|BP| = \frac{S}{5}$  yazılabilir. Benzer şekilde  $AB = \frac{S}{2}$  olur.  $ABP$  dik üçgeni göz önüne alınarak  $|AP|^2 + |BP|^2 = |AB|^2$  eşitliğinden  $25 + \frac{S^2}{25} = \frac{S^2}{4}$  bulunur. Buradan da  $S = \frac{50}{\sqrt{21}}$  ve  $|BC| = \frac{20}{\sqrt{21}}$  elde edilir.

16. Kenar uzunluğu 2 olan bir  $ABCD$  karesinde  $AD$  'nin orta noktası  $E$  ve  $C$  'den  $BE$  'ye inilen dikmenin ayağı  $F$  dir.  $CDEF$  dörtgeninin alanını bulunuz.

**Çözüm:**  $BAE$  dik üçgeninde  $|BE| = \sqrt{5}$  'tir.  $CFB$  ve  $BAE$  üçgenlerin ben-



zerliğinden  $Alan(CFB) = \left(\frac{CB}{BE}\right)^2 Alan(BAE) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \frac{1}{2}(2 \cdot 1) = \frac{4}{5}$  elde edilir. Dolayısı ile,  $Alan(CDEF) = Alan(ABCD) - Alan(BAE) - Alan(CFB) = 4 - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$  olur.

17. Yüksekliklerinden ikisi 5 ve 7 olan bir üçgenin üçüncü yüksekliğinin üst sınırını bulunuz.

**Çözüm:** Üçgenin kenar uzunluklarını  $a, b$  ve  $c$  ile gösterelim. Uzunluğu  $a$  ve  $b$  olan kenarlara inilen dikmelerin uzunlukları sırasıyla 5 ve 7, diğer uzunluk da  $h$  olmak üzere  $5a = 7b = hc$  olduğundan  $\frac{a}{c} = \frac{5}{7}$  ve  $\frac{b}{c} = \frac{7}{5}$  elde edilebilir.  $a < b + c$  eşitsizliğini  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c} + 1$  biçiminde yazarsak  $\frac{5}{7} < \frac{7}{5} + 1$  bulunur. Bu eşitsizlik çözülerek  $h < 17.5$  bulunur.

18. Bir üçgenin kenarları  $a, b, c$  ve çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu  $R$  olsun. Eğer  $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$  ise üçgenin açılarını bulunuz.

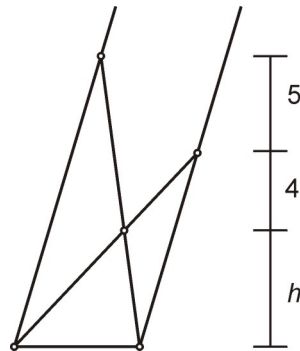
**Çözüm.**  $b+c \geq 2\sqrt{bc}$  olduğundan  $\frac{\sqrt{bc}}{b+c} \leq \frac{1}{2}$  eşitsizliğini elde ederiz. Soruda verilen eşitliği kullanarak :

$\frac{R}{a} = \frac{\sqrt{bc}}{b+c} \leq \frac{1}{2}$  yani  $a \geq 2R$  eşitsizliğini buluruz (bir üçgenin herhangi bir kenarının uzunluğu çevrel çemberinin çapından büyük olamaz.).

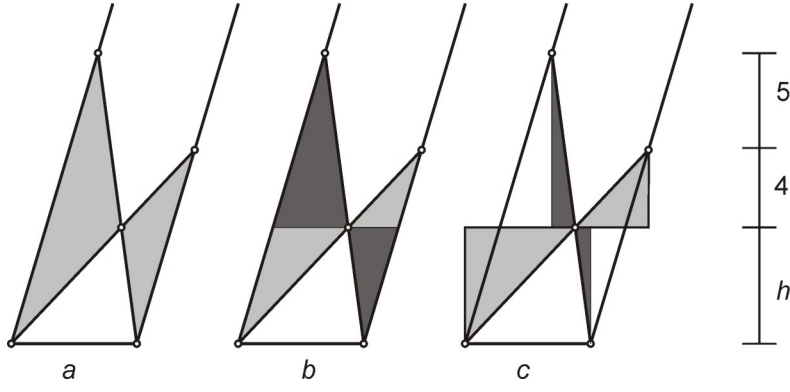
Yani  $a \leq 2R$ dir ve buradan  $a = 2R$  olduğunu görürüz.

Elimizdeki  $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$  denklemindeki  $a$  yerine  $2R$  koyarsak  $1 = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}$  denklemini elde ederiz. Bu da  $(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2$ 'nin açılımıdır. Buradan da  $b = c$  bulmuş oluruz. Eğer  $b = c$  ve  $R = \frac{a}{2}$  ise bu üçgen ikiz kenar dik üçgendir. Yani üçgenin açılarını  $\hat{A} = 90^\circ$  ve  $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$  olarak buluruz.

19. İki merdiven, dar bir sokakta orantısız bir  $X$ -şekli biçiminde çaprazlama yerleştirilmiştir. Sokak duvarları zemine dik değil, fakat birbirlerine paraleldir. Zemin, düz ve yataydır. Her bir merdivenin tabanı, karşı duvara değecek şekilde yerleştirilmiştir. Uzun olan merdivenin sokak duvarına değen üst kısmı ile kısa olan merdivenin karşı duvara değen üst kısmı arasındaki mesafe dikey olarak 5 m 'dir. Kısa olan merdivenin karşı duvara değen üst kısmı ile de, iki merdivenin kesiştikleri nokta arasındaki mesafe dikey olarak 4 m 'dir. Merdivenlerin kesişim noktasının yere olan yüksekliği dikey olarak ne kadardır?



**Çözüm.** Aşağıdaki ardışık şekilleri dikkate alalım. Her birinde, sokak duvarlarının birbirine paralel olmasından dolayı aynı renkteki üçgenler benzerdir.

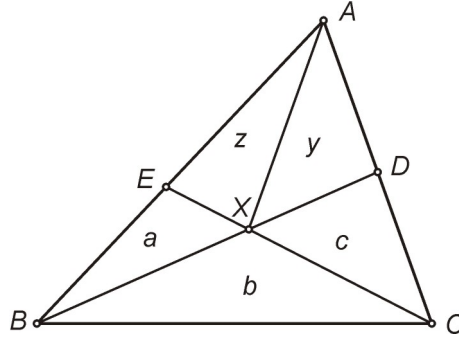


Benzer üçgenlerden,  $\frac{9}{h} = \frac{h}{4}$  'tür. Bu yüzden  $h^2 = 36$  'dır.

Uzunluk aradığımız için negatif kökü kullanılamayacağından, iki merdivenin kesiştikleri noktanın, yere olan dik yüksekliği,  $h = 6 \text{ m}$  ' dir.

20.  $ABC$  üçgeninde,  $D$  noktası  $[AC]$  üzerinde olmak üzere  $[BD]$  ve  $E$  noktası  $[AB]$  üzerinde olmak üzere  $[CE]$  doğru parçaları çiziliyor.  $[BD]$  ve  $[CE]$  nin kesişim noktası  $X$ ,  $\text{Alan}(BXE) = a$ ,  $\text{Alan}(BXC) = b$  ve  $\text{Alan}(CXD) = c$  olmak üzere  $\text{Alan}(AEXD)$  yi  $a, b$  ve  $c$  cinsinden bulunuz.

**Çözüm.** Önce  $AX$  doğru parçasını çizelim.  $A(AEX)=z$  ve  $A(AXD)=y$  olsun.  $BXE$  ve  $BXC$  üçgenlerinin tabanları sırasıyla  $EX$  ve  $XC$  alınırsa yükseklikleri



aynı olur. Dolayısıyla alanları oranı  $\frac{a}{b} = \frac{|EX|}{|XC|}$  olur. Aynı şekilde  $BXC$  ve  $CXD$  üçgenlerinde tabanlar sırasıyla  $BX$  ve  $XD$  alınırsa bu iki üçgenin alanları oranı,  $\frac{b}{c} = \frac{|BX|}{|XD|}$ ,  $AXB$  ve  $AXD$  üçgenlerinde de  $BX$  ve  $XD$  taban alındığında alanlar oranı  $\frac{z+a}{y} = \frac{BX}{XD} = \frac{b}{c}$  olacaktır. Bu yolla  $AXE$  ve  $AXC$  üçgenlerinden de  $\frac{z}{y+c} = \frac{|EX|}{|XC|} = \frac{a}{b}$  elde edilir. Bu denklemlerde içler dışlar çarpımı yapılırsa,

$$by = cz + ac \quad (7)$$

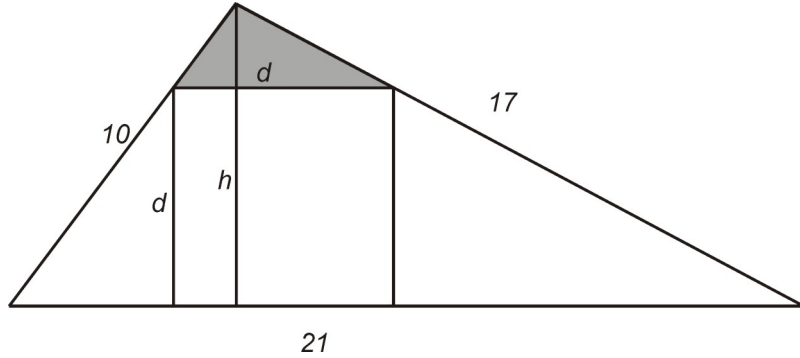
$$bz = ay + ac \quad (8)$$

bulunur. (7) eşitliğini  $b$  ile, (8) eşitliğini  $c$  ile çarpıp toplarsak  $b^2y = acb + acy + ac^2$

elde edilir. Buradan  $y = \frac{ac(b+c)}{b^2-ac}$  bulunur.  $y$  yi (7) ya da (8) eşitliğinde yerine yazarsak  $z = \frac{ac(a+b)}{b^2-ac}$  olarak bulunur.  $AEXD$  dörtgeninin alanı ise  $z + y = \frac{ac(a+2b+c)}{b^2-ac}$  olur.

21. Kenar uzunlukları 10, 17 ve 21 olan bir üçgenin içine bir kenarı üçgenin en uzun kenarında ve diğer iki köşesi üçgenin kısa kenarları üzerinde olacak şekilde bir kare yerleştiriliyor. Karenin kenar uzunluğunu bulunuz.

**Çözüm.** Heron formulünden, kenarları  $a, b, c$  olan üçgenin alanının,  $s = (a+b+c)/2$  olmak üzere,  $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,  $s = (10+17+21)/2 = 24$  ve  $A = 84$  buluruz. En uzun kenara ait yüksekliğin uzunluğuna  $h$  dersek,  $A = 1/2 \cdot \text{taban} \cdot \text{yükseklik}$  alan formülünden, üçgenin alanı  $A = 21h/2 = 84$  bulunur ve buradan da  $h = 8$  elde edilir.



Karenin bir kenar uzunluğuna  $d$  diyelim. Karenin üstündeki üçgen ile en büyük üçgen benzerdir. (Küçük üçgenin tabanının, büyük üçgenin tabanına paralel olduğuna dikkat ediniz.) Benzer üçgenlerdeki yüksekliklerinin tabanlarına oranlarından  $8/21 = (8-d)/d = 8/d - 1$  buluruz. Dolayısıyla, karenin kenar uzunluğu  $d = 168/29$  dur.

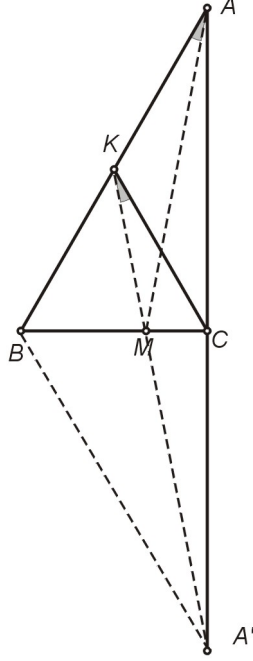
22.  $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB})$  ve  $|AB| = |AD|$  olacak şekilde bir dışbükey  $ABCD$  dörtgeni verilsin.  $A$  noktasından  $CB$  ve  $DB$  doğrularına çizilen dikmelerin kesişim noktaları sırasıyla  $N$  ve  $K$  olmak üzere  $NK$  doğrusunun  $AC$  doğrusuna dik olduğunu gösteriniz.

**Çözüm**  $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADB})$  olduğundan dolayı  $ABD$  üçgeni ikizkenardır. Dolayısıyla  $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ABD})$  dir.  $\widehat{ANB}$  ve  $\widehat{AKB}$  açıları  $90^\circ$  olduklarından ve  $AB$  gördüklerinden dolayı  $ABNK$  bir kirişler dörtgenidir. Buradan  $M$  noktası  $AC$  ve  $NK$  nın kesişim noktası olmak üzere  $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ABK}) = m(\widehat{ANK}) = m(\widehat{ANM})$  eşitlikleri bulunur.  $AMN$  üçgeninden  $m(\widehat{AMN}) + m(\widehat{ANM}) + m(\widehat{NAM}) = 180^\circ$  yazılabilir. Buradan,  $m(\widehat{AMN}) = 180^\circ - m(\widehat{ANM}) - m(\widehat{NAM}) = 180^\circ - m(\widehat{ACB}) - m(\widehat{NAC}) = m(\widehat{ANC}) = 90^\circ$  yazılabilir. Sonuç olarak  $AC$  ve  $NK$  nın dikliği bulunmuş olur.



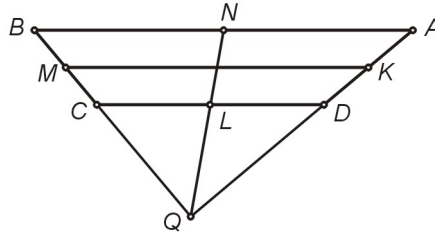
25.  $ABC$  dik üçgeninde  $AB$  hipotenüsünün orta noktası  $K$  olsun.  $M$ ,  $BC$  kenarı üzerinde  $|BM| = 2|MC|$  olacak şekilde bir nokta ise  $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MKC})$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $A'$ ,  $AC$  kenarı uzatılarak  $|A'C| = |AC|$  olacak şekilde bir nokta olsun ve



$A'AB$  üçgenini oluşturalım.  $|A'C| = |AC|$  ve  $BC \perp AA'$  olduğundan  $A'AB$  üçgeni ikizkenar üçgendir. Ayrıca  $M$  bu üçgenin ağırlık merkezidir.  $K$  'de  $BA$  'nın orta noktası olduğu için  $A'$ ,  $M$  ve  $K$  doğrusaldır.  $|A'C| = |AC|$  ve  $|AK| = |KB|$  olduğu için  $CK$  ve  $BA'$  paraleldir. Bu yüzden  $m(\widehat{CKM}) = m(\widehat{MA'B}) = m(\widehat{MAB})$  'dir.

26. Bir yamuğun orta tabanının uzunluğu 4 ve taban açıları  $40^\circ$  ve  $50^\circ$  'dir. Alt ve üst tabanın orta noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu 1 ise taban uzunluklarını hesaplayınız.



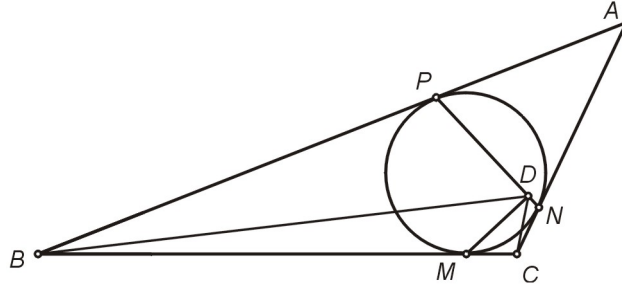
$ABQ$  üçgeni dik olduğu için  $|AN| = |BN| = |QN|$  ve  $|DL| = |LC| = |QL|$  'dir.

$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{2} - \frac{|CD|}{2} &= |QN| - |QL| = |LN| = 1 \\ |KM| &= \frac{|AB| + |CD|}{2} = 4\end{aligned}$$

denklemleri çözüldüğünde  $|AB| = 5$ ,  $|CD| = 3$  olarak bulunur.

27.  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberi  $BC$  kenarına  $M$ ,  $CA$  kenarına  $N$ ,  $AB$  kenarına ise  $P$  noktalarında teğettir.  $NP$  doğrusu üzerinde  $\frac{|DP|}{|DN|} = \frac{|BD|}{|CD|}$  olmak üzere bir  $D$  noktası olduğuna göre  $DM \perp PN$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $|AP| = |AN|$  olduğundan  $m(\widehat{ANP}) = m(\widehat{APN})$  yani  $m(\widehat{NPB}) = m(\widehat{PNC})$  olur.



Bu durumda  $BDP$  ve  $CND$  üçgenleri benzer olduğundan ve  $m(\widehat{CDN}) = m(\widehat{BDP})$  olduğundan,  $\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|CN|}{|BP|} = \frac{|CM|}{|BM|}$  olduğu görülür.

Dolayısıyla  $DM$  doğrusu  $\widehat{BDC}$  açısının açı ortaydır ve bu nedenle  $NP \perp MD$  olur.

28.  $M$  noktası,  $ABCD$  karesinin çevrel çemberindeki  $CD$  yaylarından kısa olanının üzerinde bir nokta olsun.  $P$  ve  $R$  noktaları sırasıyla  $AM$  doğrusuyla  $BD$  ve  $CD$  doğru parçalarının kesişimlerini göstere. Benzer şekilde,  $Q$  ve  $S$  noktaları da  $BM$  doğrusu ile sırasıyla  $AC$  ve  $DC$  doğru parçalarının kesişim noktaları olsunlar.  $PS$  ve  $QR$  doğrularının birbirlerine dik olduklarını gösteriniz.

**Çözüm.**  $O$  noktası ile  $ABCD$  karesinin merkezini gösterelim.  $M$  noktası, çemberin yukarıda söylenen yayının üzerinde olduğundan,  $AMB$  açısının ölçüsü merkezi  $AOB$  açısının (dik açı) yarısı kadardır, yani  $45^\circ$ 'dir. Bu açı  $ABCD$  karesi içindeki  $BDC$  açısıyla aynı olduğundan,  $PS$  parçası  $D$  noktasından da  $M$  noktasından da  $45^\circ$  ile görülür.  $D$  ve  $M$  noktalarının her birisi  $PS$  yarı düzleminde olduklarından,  $PSMD$  dörtgeni kirişler dörtgenidir. Bu dörtgenin  $DMS$  iç açısı dik açıdır (çünkü  $M$  noktası  $BD$  çapını görmektedir). Böylece  $DPS$  açısının da dik olduğu bulunur. Yani



- 

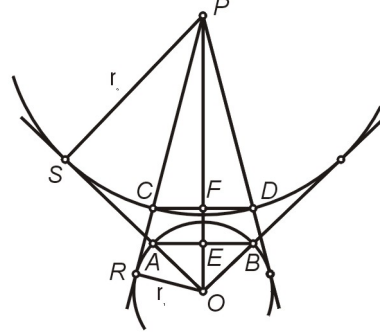
$$\begin{aligned} |AD| &= \sqrt{(36+12)^2 + (25+12)^2} = \sqrt{3673} \\ |BD| &= \sqrt{(12+36+12)+25^2} = \sqrt{4225} \\ |AC| &= \sqrt{36^2 + (12+25+12)^2} = \sqrt{3697} \\ |BC| &= \sqrt{(36+12)^2 + (12+25)^2} = \sqrt{3673} \end{aligned}$$

422

mesafe ilk bulduğumuz 61 birimden de kısa olduğu için karıncanın kullanabileceği en kısa mesafedir.

30. Merkezleri  $O$  ve  $P$  olan iki tane daire alalım. Her bir dairenin merkezinden, diğer dairenin çevresine iki tane teğet çizelim.  $O$  merkezli daireden çizilen teğetler,  $O$  merkezli daireyi  $A$  ve  $B$  noktalarında;  $P$  merkezli daireden çizilen teğetler de,  $P$  merkezli daireyi  $C$  ve  $D$  noktalarında kessin.  $AB$  ve  $CD$  kirişlerinin eşit uzunlukta olduklarını gösteriniz.

**Çözüm.**  $|OR| = r_1$  ve  $|PS| = r_2$  olsun.  $OP$ , şeklin bir simetri eksenine olduğu için  $E$  noktası,  $AB$  kirişinin;  $F$  noktası da,  $CD$  kirişinin orta noktasıdır. Ayrıca; simetriden dolayı,  $AB$  ve  $CD$ ,  $OP$  ile dik kesişirler.  $OS$  ve  $PR$  teğet oldukları için,  $ORP$  ve  $PSO$  açıları, dik açılarıdır.



$OEA$  ve  $OPS$  üçgenlerinin bir açısı ortaktır ve her ikisinde bir dik açı içermektedir. Bu yüzden, bu iki üçgen benzerdir. Dolayısıyla,  $|AE|/|OA| = |PS|/|OP|$  'dir.  $|OA| = r_1$  ve  $|PS| = r_2$  olduğu için,  $|AE| = r_1 r_2 / |OP|$  olur. Bu yüzden,  $|AB| = 2r_1 r_2 / |OP|$  'dir.

Benzer şekilde, simetriden dolayı  $|CD| = 2r_1 r_2 / |OP|$  'dir. ( $PFC$  ve  $PRO$  benzer üçgenlerdir)

Sonuç olarak,  $AB$  ve  $CD$  kirişlerinin uzunlukları birbirine eşit olur.

31. Bir  $ABCD$  dörtgeninde,  $Alan(ABC) \leq Alan(BCD) \leq Alan(CDA) \leq Alan(DAB)$  ise  $ABCD$  nin bir yamuk olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.**  $[AC]$  ve  $[BD]$  köşegenlerinin kesişim noktası  $O$  olsun.  $Alan(ABC) \leq Alan(BCD)$  olduğu için

$$Alan(AOB) + Alan(BOC) \leq Alan(BOC) + Alan(DOC)$$

buradan da

$$Alan(AOB) \leq Alan(DOC) \quad (9)$$

elde edilir. Benzer şekilde,  $Alan(CDA) \leq Alan(DAB)$  eşitsizliğinden

$$Alan(DOC) \leq Alan(AOB) \quad (10)$$

ve, (9) ve (10) den

$$Alan(DOC) = Alan(AOB) \quad (11)$$

olduğunu görürüz. (11) ün her tarafına  $Alan(BOC)$  eklersek,  $Alan(BCD) = Alan(ABC)$  elde ederiz. Şimdi,  $ABC$  ve  $BCD$  üçgenlerinde,  $[BC]$  kenarları ortak ve alanları eşit olduğu için,  $A$  ve  $D$  köşelerinden çizilen yüksekliklerin uzunlukları eşittir. Bu da bize  $[AD]$  ve  $[BC]$  nin paralel olduğunu, dolayısıyla  $ABCD$  nin bir yamuk olduğunu gösterir.

32. Köşegenlerin kesişimi  $O$  olan  $ABCD$  paralelkenarında,  $M$  ve  $N$  noktaları sırasıyla  $[BO]$  ve  $[CD]$  nin orta noktaları olsunlar.  $ABC$  ve  $AMN$  üçgenleri benzer ise,  $ABCD$  nin bir kare olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.**  $AMN$  ve  $ABC$  üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AC|} \quad (1)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

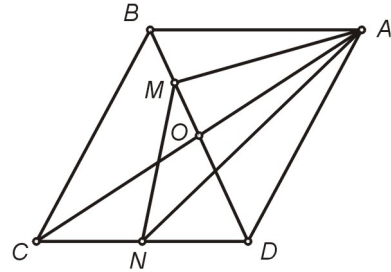
$$m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{BAC}) \text{ ve } m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{CAN}) \quad (2)$$

olur. (1) ve (2) den  $BAM$  ve  $CAN$  üçgenlerinin benzer olduğunu görürüz. Buradan,

$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BM|}{|CN|} \quad (3)$$

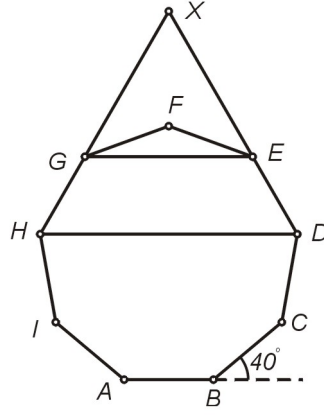
ve  $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{ACN})$  elde edilir. Dolayısıyla  $A, B, C, D$  noktaları merkezi  $O$  olan bir çember üzerindedir, ve  $ABCD$  bir dikdörtgendir.

Şimdi,  $|BM| = \frac{1}{4}|BD| = \frac{1}{4}|AC|$  ve  $|CN| = \frac{1}{2}|AB|$  olduğunu buluruz. Dolayısıyla, (3) teki ikinci eşitlik bize  $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{2|AB|}$  verir ve buradan  $2|AB|^2 = |AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$  elde ederiz ki bu da  $ABCD$  nin kare olduğunu gösterir.



33. Bir düzgün dokuzgenin en uzun köşegeninin uzunluğunun, en kısa köşegeni ile bir kenarının uzunlukları toplamına eşit olduğunu gösteriniz.

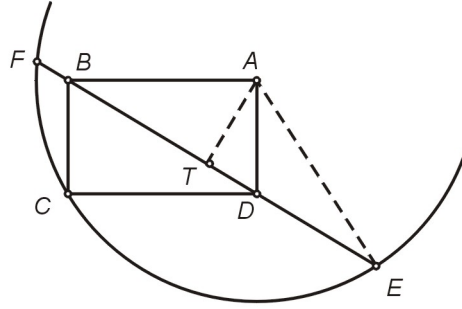
**Çözüm.** Bir düzgün dokuzgeni  $ABCDEFGHI$  ile gösterelim.  $DE$  ve  $HG$  kenarları  $X$  noktasında kesişsinler. Simetriden dolayı  $AC = EG$  ve  $AF = DH$  olmalıdır. Açık bir şekilde,  $EG$  ve  $DH$  doğru parçaları  $AB$  kenarına paraleldir.



$BC$  doğru parçası  $AB$  kenarıyla  $40^\circ$  lik açı yaptığından,  $CD$  kenarı  $AB$  ile  $80^\circ$  lik ve  $DE$  kenarı da  $AB$  ile  $120^\circ$  lik açı yapar. Yani,  $m(\widehat{HDX}) = 60^\circ$  ve  $m(\widehat{XHD}) = 60^\circ$  dir. Dolayısıyla  $XHD$  ve  $XGE$  üçgenleri eşkenar üçgenlerdir.  $DH = DX$  ve  $EG = EX$  dir. Buradan da  $DX = DE + EX$  ve  $DH = DE + EG$  bulunur.

34. Kenarları 20 ve 15 olan bir  $ABCD$  dikdörtgeni verilsin. Merkezi  $A$  noktasında olan bir çember  $C$  köşesinden geçiyor.  $BD$  doğru parçasını içeren kirişin uzunluğunu bulunuz.

### Çözüm



$T$ ,  $EF$  nin orta noktası olsun.  $AT$ ,  $EF$  ye diktir yani  $AT$ ,  $BAD$  üçgeninin yüksekliğidir. Pisagor teoreminden dolayı

$$|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2$$

$$|BD|^2 = 20^2 + 15^2$$

$$|BD| = 25 \text{ dir.}$$

$BAD$  üçgeninin alanını iki şekilde hesaplarsak:

$$\frac{|AD| \cdot |AB|}{2} = \frac{|BD| \cdot |AT|}{2}$$

$$\frac{15 \cdot 20}{2} = \frac{25 \cdot |AT|}{2}$$

$$|AT| = 12$$

bulunur.  $AE$  yarıçap olduğu için  $AE$  uzunluğu  $AC$  uzunluğuna eşittir.  $ATE$  üçgenine Pisagor Teoremi uygularsak:

$$|AC|^2 = |AE|^2 = |AT|^2 + |TE|^2$$

$$25^2 = 12^2 + |TE|^2$$

$$|TE|^2 = 481$$

$$|TE| = \sqrt{481}$$

olur.  $EF$  uzunluğu  $TE$  nin iki katı olduğu için,  $|EF| = 2\sqrt{481}$  olarak bulunur.

35. Yarı çapı  $r$  olan bir çemberle çevrelenmiş ve alanı  $3r^2$  olan düzgün çokgenin kenar sayısı nedir?

**Çözüm.** Öncelikle düzgün çokgenin  $n$  kenarlı olduğunu düşünelim. Şimdi çokgeni, tabanı çokgenin bir kenarı, diğer kollarıysa çokgeni çevreleyen çemberin yarı çapı olacak şekilde eş üçgenlere ayıralım. Bu tür her üçgenin tepe açısı  $\frac{2\pi}{n}$  olacaktır. Dolayısıyla her bir üçgenin alanı  $\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ , ve  $n$ -gen'in alanı da  $\frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$  olur. Buradan  $3 \cdot r^2 = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$  denklemi elde edilir. Bu denklemi düzenlersek,  $\frac{6}{n} = \sin \frac{2\pi}{n}$  yani  $n = 12$  buluruz. Burada dikkat edilecek husus sadece onikigenin bu özelliği sağlamasıdır, çünkü aynı çemberin içine çizilecek olan başka bir düzgün çokgenin alanı kenar sayısı ile doğru orantılı olarak istenen değerden farklı olacaktır.

36.  $ABC$  dar açılı üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $O$  olsun.  $O_1$  ise  $AB$  kenarını iki eşit parçaya ayıran ve  $O$  noktasından geçen doğrunun üzerinde,  $O$  noktasına göre  $AB$  kenarının diğer tarafında kalan bir nokta olsun. Merkezi  $O_1$ , yarı çapı  $AO_1$  olan çembere  $K$ ,  $CA$  ve  $CB$  doğrularının  $K$  ile kesiştiği noktalara ise sırasıyla  $A_1$  ve  $B_1$  diyelim. Bu durumda  $A_1B$  ve  $AB_1$  doğruları  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin üzerinde kesiştiğinde  $AO_1BO$  dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olduğunu gösteriniz.

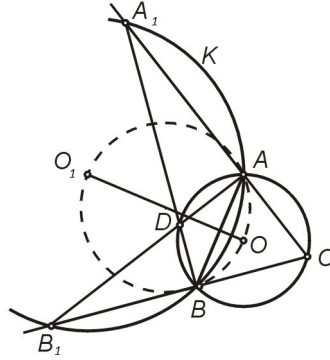
**Çözüm.**  $A_1B$  ve  $AB_1$  doğruları  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin üzerinde kesiştiği noktaya  $D$  noktası diyelim ve  $m(\widehat{A_1AB_1}) = \alpha$  olsun. Bu durumda  $m(\widehat{CAD}) = 180^\circ - m(\widehat{DAA_1}) = 180^\circ - \alpha$  olur. Burada  $A$ ,  $C$ ,  $B$  ve  $D$  noktaları bir çember üzerindeki noktalar oldukları için,  $m(\widehat{CBD}) = 180^\circ - m(\widehat{CAD}) = \alpha$  olur. Şimdi  $\widehat{A_1AB_1}$

ve  $\widehat{A_1BB_1}$  açıları  $K$  çemberi üzerinde  $A_1B_1$  yayına baktıkları için eşit açılardır. Dolayısıyla  $180^\circ - \alpha = m(\widehat{A_1BB_1}) = m(\widehat{A_1AB}) = \alpha$  yani  $\alpha = 90^\circ$  olur.

Şimdi  $m(\widehat{ACB}) = \gamma$ , ve dolayısıyla  $m(\widehat{AOB}) = 2m(\widehat{ACB}) = 2\gamma$  olsun. Ancak diğer taraftan  $m(\widehat{AB_1C}) = 180^\circ - m(\widehat{B_1AC}) - m(\widehat{ACB_1}) = 180^\circ - 90^\circ - \gamma = 90^\circ - \gamma$  olduğundan,  $m(\widehat{AO_1B}) = 2m(\widehat{AB_1B}) = 2m(\widehat{AB_1C}) = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma$  olur. Bunların ışığında

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BO_1A}) = 2\gamma + (180^\circ - 2\gamma) = 180^\circ$$

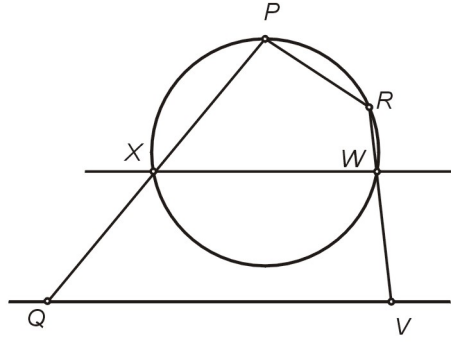
olduğundan  $AOBO_1$  dörtgeni bir kirisler dörtgenidir.



37.  $P$  noktası bir çember üzerinde,  $Q$  noktası bir doğru üzerinde sabit;  $R$  noktası ise  $P$  noktasının bulunduğu çember üzerinde ( $P, Q, R$  bir doğru üzerinde olmayacak şekilde) değişken bir noktadır.  $P, Q$  ve  $R$  noktalarından geçen çember,  $Q$  noktasının bulunduğu doğruyu tekrar  $V$  noktasında kestiğine göre,  $VR$  doğrusunun bir sabit noktadan geçtiğini gösteriniz.

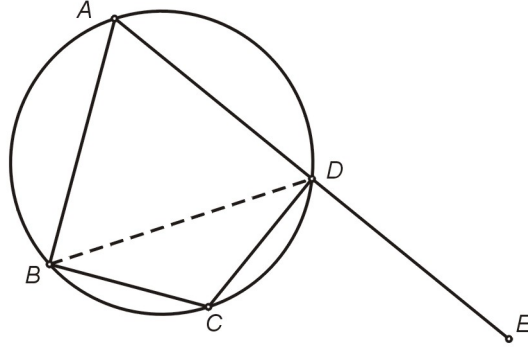
**Çözüm.**  $PQ$  doğrusunun çemberi kestiği diğer noktaya  $X$ ,  $QV$  doğrusuna paralel olan ve  $X$  noktasından geçen doğrunun çemberi kestiği diğer noktaya ise  $W$  noktası diyelim. Bu durumda  $W$  çember üzerindeki bir sabit nokta olur. Şimdi  $W$  noktasının,  $RV$  doğrusu üzerinde olduğunu gösterelim.

$PQVR$  kirisler dörtgeni olduğu için  $m(\widehat{PRV}) = 180^\circ - m(\widehat{PQV})$ 'dir. Aynı şekilde  $PXWR$  kirisler dörtgeni olduğu için,  $m(\widehat{PRW}) = 180^\circ - m(\widehat{PXW})$ 'dir. Ayrıca  $XW \parallel QV$  olduğu için,  $m(\widehat{PXW}) = m(\widehat{PQV})$  olduğunu da biliyoruz. Bu durumda denklemleri beraber incelediğimizde  $m(\widehat{PRW}) = m(\widehat{PRV})$  olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla  $R, W$  ve  $V$  noktaları aynı doğru üzerindedir. (Burada  $R$  noktasının  $PQ$  doğrusunun hangi tarafında olduğuna göre değişik şekiller olabilir ancak her durumda yukarıdaki gibi bir argüman kullanılabilir.)



38.  $ABCD$ , bir kirişler dörtgeni olsun.  $AC$  köşegeni  $DAB$  açısının açıortayıdır.  $AD$  kenarı,  $D$  köşesinden uç noktası  $E$  olacak şekilde uzatılıyor.  $|CE| = |CA| \Leftrightarrow |DE| = |AB|$  olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm:**  $ABCD$  kirişler dörtgeninde  $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAB})$  olduğundan ve eşit açıların gördükleri kiriş uzunluklarının da aynı olacağından  $|BC| = |CD|$  dir.  $m(\widehat{EDC}) =$



$180 - m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{ABC})$  olduğundan  $CDE$  üçgenini  $C$  köşesi dönme noktası olacak, ve  $B$  ve  $D$  noktaları çakışacak şekilde döndürdüğümüzde  $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{ABC})$  olduğundan  $E$  noktası  $BA$  doğrusu üzerinde yer alacaktır. Bu noktaya  $E'$  adı verelim. Döndürme, uzaklıkları koruyacağından  $|CE| = |CE'|$  olur. Bu ise  $E' = A$  olmasını gerektirir. Ayrıca  $E' = A$  olması da  $|CE| = |CA|$  olduğunu gösterir.

$$E' = A \Leftrightarrow |CE| = |CA|$$

Aynı şekilde  $|DE| = |BE'|$  olması için de  $A = E'$  olması ve  $|DE| = |BE'|$  olması da  $|DE| = |BE'|$  olmasını gerektirir.

$$A = E' \Leftrightarrow |DE| = |BE'|$$

Bu iki koşullu ifadeyi birleştirdiğimizde

$$|CE| = |CA| \Leftrightarrow |DE| = |BE'|$$

sonucu elde edilir.

39. Alanı 7 olan bir  $ABC$  eşkenar üçgeninde  $M$  ve  $N$  noktaları sırasıyla  $AB$  ve  $AC$  üzerinde bulunan ve  $AN = BM$  koşulunu sağlayan noktalar olsun.  $O = BN \cap CM$  olmak üzere,  $BOC$  üçgeninin alanı 2 olsun.

a)  $MB : AB = 1 : 3$  veya  $MB : AB = 2 : 3$  olduğunu ispatlayınız.

b)  $AOB$  açısının ölçüsünü bulunuz.

**Çözüm.** a)  $\frac{MB}{AB} = x$  olsun.

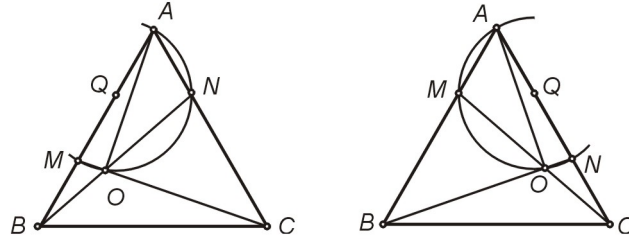
Bu durumda  $A(ABN) = 7x = A(BMC)$ ,  $A(BOM) = 7x - 2$  ve  $A(AMON) = A(BOC) = 2$  olur.

Ayrıca,  $A(CON) = 7 - 2 - 2 - (7x - 2) = 5 - 7x$ ,  $A(ANO) = \frac{x}{1-x}$ .  $A(CNO) = \frac{x(5-7x)}{1-x}$  ve  $A(AMO) = \frac{1-x}{x}$ .  $A(BOM) = \frac{1-x}{x}(7x - 2)$  bulunur.

Buradan,  $A(AMON) = A(ANO) + A(AMO)$  ifadelerini yerlerine yazarsak,

$$2 = \frac{x(5-7x)}{1-x} + \frac{1-x}{x}(7x-2)$$

bulunur. Yani  $9x^2 - 9x + 2 = 0$  ve buradan da  $x = \frac{1}{3}$  ve ya  $x = \frac{2}{3}$  elde edilir.



b)  $ABN$  ve  $BMC$  üçgenleri benzer üçgenler oldukları için

$$m(\widehat{BOM}) = m(\widehat{BCM}) + m(\widehat{CBO}) = m(\widehat{MBO}) + m(\widehat{CBO}) = 60^\circ$$

dir. Dahası,  $m(\widehat{MAN}) + m(\widehat{MON}) = 180^\circ$  olduğu için  $AMON$  dörtgeni bir kirişler dörtgenidir.

$\frac{MB}{AB} = \frac{1}{3}$  olsun. Yani,  $AM = 2BM = 2AN$  olsun.  $AM$  kenarının ortanoktasına  $Q$  dersek,  $AQN$  üçgeni ikizkenar olur ve  $m(\widehat{AQN}) = 60^\circ$  olur. Dolayısıyla  $AQN$  eşkenar



üçgendir. Bundan dolayı  $Q$ ,  $AMQN$  dörtgeninin çevrel çemberinin merkezidir ve  $m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{ANM}) = 90^\circ$  dir. Dolayısıyla  $m(\widehat{AOB}) = 150^\circ$  dir. Benzer şekilde, eğer  $AB = \frac{2}{3}$  ise yani  $2AM = MB = AN$  ise  $m(\widehat{AMN}) = m(\widehat{AON}) = 90^\circ$  dir. Yani  $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$  dir.

40. Bir  $ABC$  üçgeninde  $a, b$  ve  $c$  sırasıyla  $A, B$  ve  $C$  köşelerinin karşısındaki kenarların uzunlukları ve  $r$ ,  $ABC$  üçgeninin içteğet çemberinin yarı çapı olmak üzere ve  $6(a + b + c)r^2 = abc$  eşitliğini sağlamaktadırlar.  $M$ ,  $ABC$  üçgeninin içteğet çemberinin üzerinde bir nokta ve  $D, E, F$  sırası ile bu noktanın  $BC, AC$  ve  $AB$  kenarlarına izdüşümleridir.

$Alan(ABC) = S$  ve  $Alan(DEF) = S_1$  ise  $\frac{S_1}{S}$  kesirinin alacağı en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

**Çözüm:**  $ABC$  üçgeninin yarı çevresi  $p$  ve çevrel çemberinin yarıçapı  $R$  olmak üzere  $abc = 4RS$  ve  $S = pr$  ile, verilen  $6(a + b + c)r^2 = abc$  eşitlikleri kullanılarak  $R = 3r$  elde edilir.  $O$  noktası çevrel çemberin merkezi ve  $I$  noktası  $ABC$  üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olsun. Euler'in  $|IO|^2 = R(R - 2r)$  eşitliğinde  $R = 3r$  yazarsak  $|IO| = r\sqrt{3}$  bulunur. Dolayısıyla  $|IO| > r$  olur ve  $O$  noktası içteğet çemberin dışında yer alır.

$K$  ve  $L$  noktaları,  $K$  noktası  $O$  noktasına daha yakın olacak şekilde  $IO$  doğrusunun içteğet çemberi ile kesiştiği noktalar olsun. O halde

$$|OK| \leq |OM| \leq |OL| \leq R$$

'dir.

$$\frac{S_1}{S} = \frac{|R^2 - |OM|^2|}{4R^2}$$

olduğundan

$$\frac{5 - 2\sqrt{3}}{36} = \frac{|R^2 - |OL|^2|}{4R^2} \leq \frac{S_1}{S} \leq \frac{|R^2 - |OK|^2|}{4R^2} = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{36}$$

elde edilir.

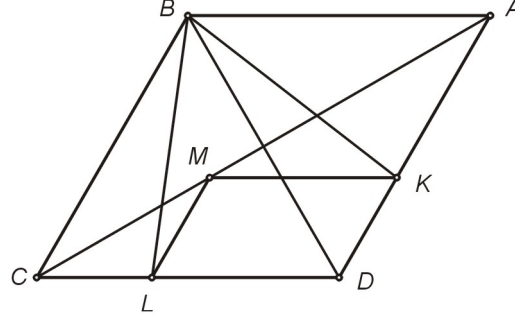
41. Bir  $ABC$  üçgeninin alanını eşit alanlı  $ABM, BCM$  ve  $MCA$  üçgenlerine bölen  $M$  noktasının ağırlık merkezi olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm.** İspat için  $ABM$  ve  $BCM$  eşit alanlı üçgenler olduğunda  $M$  noktasının  $B$  den çizilen kenarortay üzerinde olduğunu göstermek yeterlidir.

$A$  ve  $C$  noktalarının  $BM$  kenarına dik izdüşüm noktaları  $K$  ve  $H$  olmak üzere  $BM$



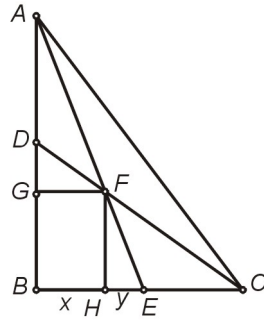
**Çözüm.**  $ABCD$  eşkenar dörtgeni  $ABD$  ve  $BCD$  olmak üzere iki tane eşkenar üçgen içerir. Eğer  $|KD| = |LC|$  olduğu gösterilirse  $KBD$  ve  $LBC$  üçgenleri benzer üçgenler,  $|KB| = |LB|$  ve  $m(\widehat{KBD}) = m(\widehat{LBC})$  olur. Yani,  $m(\widehat{KBL}) = m(\widehat{DBC}) = 60^\circ$  ve  $BKL$  üçgeni eşkenar üçgen olur.



$LM$ ,  $AD$  ye paralel ve  $m(\widehat{LMC}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{LCM})$  dir. Dolayısıyla  $MLC$  ikizkenar üçgendir; yani  $|LC| = |LM| = |KD|$  dir.

44.  $ABC$  dik üçgeninde  $D$  ve  $E$  sırası ile  $AB$  ve  $BC$  dik kenarları üzerinde  $m(\widehat{BAE}) = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{BDC}) = 45^\circ$  olacak şekilde noktalar,  $F$  ise  $AE$  ve  $CD$  doğrularının kesişim noktasıdır.  $|AE| = \sqrt{3}$ ,  $|CD| = \sqrt{2}$  olduğuna göre,  $F$  noktasının  $AB$  kenarına olan uzaklığını bulunuz.

**Çözüm:**



$F$  noktasının  $AB$  kenarına olan izdüşümü  $G$ ,  $CB$  kenarına olan izdüşümü de  $H$  olsun.  $|FG| = |HB| = x$  ve  $|HE| = y$  diyelim.  $m(\widehat{HFE}) = 30^\circ$  olduğundan  $|FH| = \sqrt{3}|EH| = \sqrt{3}y$  'dir.  $|AE| = \sqrt{3}$  ve  $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{HFE}) = 30^\circ$  olduğu için  $|BE| = x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (\*) bulunur.  $|DC| = \sqrt{2}$  ve  $m(\widehat{BDC}) = 45^\circ$  bilgileri kullanılarak da  $|DB| = |DG| + |GB| = 1$ , ve buradan da  $x + y\sqrt{3} = 1$  (\*\*) elde edilir. (\*\*)

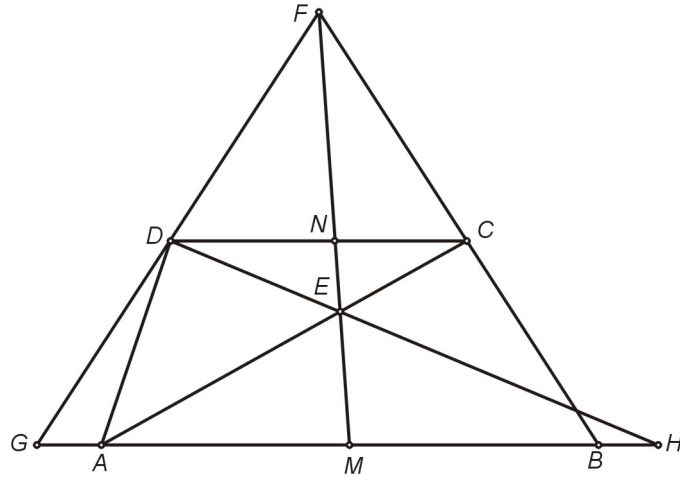
eşitliğinde, (\*) eşitliğinden elde edilen  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$  kullanılırsa

$$\begin{aligned} x + y\sqrt{3} &= 1 \\ x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right) \cdot \sqrt{3} &= 1 \\ x &= \frac{1}{2(\sqrt{3} - 1)} \end{aligned}$$

bulunur.

45.  $ABCD$  yamuğunda  $AB$  tabanının orta noktası  $M$  'dir.  $E$ ,  $AC$  köşegeni üzerinde,  $BC$  ve  $ME$ ,  $F$  noktasında;  $DE$  ve  $AB$ ,  $H$  noktasında kesişecek şekilde seçilmiş bir noktadır.  $FD$  ve  $AB$ ,  $G$  noktasında kesişiyor ise  $M$  noktasının  $GH$  nin orta noktası olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**



$CD$  ve  $EF$  doğrularının kesişim noktasına  $N$  diyelim.  $DC \parallel GB$  ve  $M, N, F$  doğruları doğrusal olduğundan

$$\frac{|GM|}{|MB|} = \frac{|DN|}{|NC|}$$

olur.  $AH \parallel DC$  ve  $M, E, N$  noktaları doğrusal olduğu için de

$$\frac{|AM|}{|MH|} = \frac{|NC|}{|DN|}$$

olur. Buradan

$$\frac{|GM|}{|MB|} \cdot \frac{|AM|}{|MH|} = 1$$

elde edilir.  $|AM| = |MB|$  olduğundan  $|GM| = |MH|$  bulunur.

46.  $P_n$ , çevrel çember yarıçapı 1 olan bir düzgün çokgendir.  $P_n$  nin alanınının çevresine oranının 0.25 den büyük olduğu en küçük  $n$  değerini bulunuz.

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} Alan(P_n) &= n \left( \frac{1}{2} \right) 2 \sin \left( \frac{\pi}{n} \right) \cos \left( \frac{\pi}{n} \right) \\ Çevre(P_n) &= n \left( 2 \sin \left( \frac{\pi}{n} \right) \right) \\ \frac{Alan(P_n)}{Çevre(P_n)} &= \frac{1}{2} \cos \left( \frac{\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

$\frac{Alan(P_n)}{Çevre(P_n)}$  oranı 0.25 'ten büyük olması için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos \left( \frac{\pi}{n} \right) &\geq 0.25 \\ \cos \left( \frac{\pi}{n} \right) &\geq 0.5 \end{aligned}$$

$\cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$  olduğundan ve  $\cos \left( \frac{\pi}{n} \right)$ ,  $n$  arttıkça arttığından en küçük  $n$  değeri 4 'tür.

47. Herhangi bir üçgen kendisi ile benzer olan

- (a) 2002
- (b) 2003

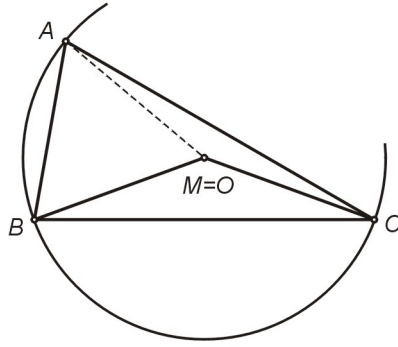
üçgene bölünebilir mi?

**Çözüm:** Herhangi bir  $n$  tamsayısı için herhangi bir üçgen kendisi ile benzer olan  $n^2$  üçgene bölünebilir. O halde bir üçgen  $45^2 = 2025$  üçgene bölünebilir. Benzer şekilde  $n^2$  benzer üçgen de, birleştirilerek bu üçgenlere benzer olan bir üçgen oluşturulabilir.

- (a) Bir üçgen  $45^2 = 2025$  benzer üçgene bölünebilir. Oluşturulan küçük üçgenlerin  $4^2 = 16$  tanesi ve  $3^2 = 9$  tanesi ayrı ayrı birleştirildiğinde üçgen sayısı oluşan yeni iki üçgenle birlikte  $16 - 1 + 9 - 1 = 23$  azalır. Geriye  $2025 - 23 = 2002$  benzer üçgen kalır.
- (b) 2025 benzer üçgenden 2 defa  $2^2 = 4$  üçgen ve 2 defa  $3^2 = 9$  üçgen ayrı ayrı birleştirildiğinde üçgen sayısı  $2(4 - 1) + 2(9 - 1) = 22$  azalır. Geriye  $2025 - 22 = 2003$  benzer üçgen kalır.

48.  $ABC$  üçgeninin içinde bir  $M$  noktası olsun. Bu üçgende  $m(\widehat{BAC}) = 70^\circ$ ,  $m(\widehat{ABC}) = 80^\circ$ ,  $m(\widehat{ACM}) = 10^\circ$  ve  $m(\widehat{CBM}) = 20^\circ$  olduğuna göre  $|AB| = |MC|$  olduğunu gösteriniz.

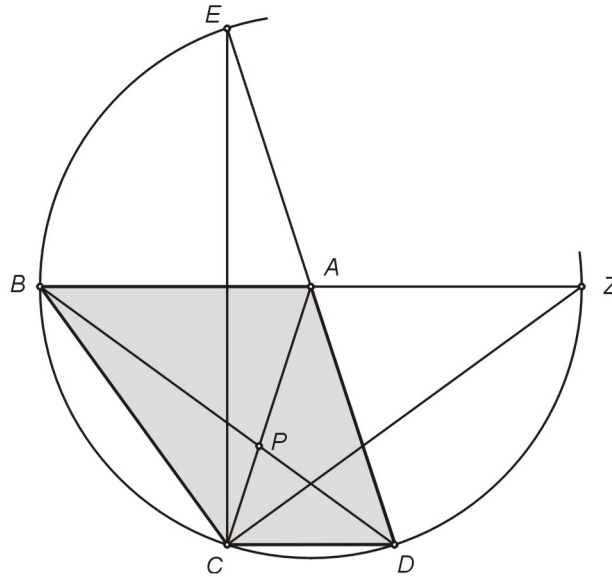
**Çözüm.**  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezi  $O$  noktası olsun.  $ABC$  dar açılı bir üçgen olduğu için  $O$  noktası üçgenin içindedir.



Bu durumda  $m(\widehat{AOC}) = 2m(\widehat{ABC}) = 160^\circ$  olduğundan  $m(\widehat{ACO}) = 10^\circ$ ,  $m(\widehat{BOC}) = 2m(\widehat{BAC}) = 140^\circ$  olduğundan  $m(\widehat{CBO}) = 20^\circ$  olur. Dolayısıyla  $O \equiv M$  ve dolayısıyla  $|MA| = |MB| = |MC|$  olduğu görülür. Bu durumda  $m(\widehat{ABO}) = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$  olduğundan  $ABM$  üçgeni eşkenar üçgendir. Yani  $|AB| = |MB| = |MC|$  olduğu görülür.

49.  $ABCD$  dörtgeni  $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BDC}) = 36^\circ$ ,  $m(\widehat{CBD}) = 18^\circ$  ve  $m(\widehat{BAC}) = 72^\circ$  olmak üzere bir dışbükey dörtgendir.  $AC$  ve  $BD$  köşegenlerinin kesiştiği nokta  $P$  olduğuna göre  $\widehat{APD}$  açısının ölçüsünü bulunuz.

**Birinci Çözüm.**  $DA$  ve  $BA$  doğruları üzerinde  $|AC| = |AE| = |AZ|$  olacak şekilde  $E$  ve  $Z$  noktaları olsun.

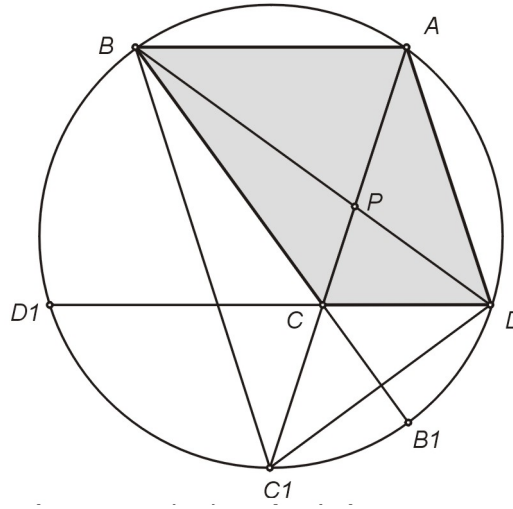


Bu durumda  $m(\widehat{DEC}) = \frac{m(\widehat{DAC})}{2} = 18^\circ = m(\widehat{CBD})$  olduğundan  $DEBC$  dörtgeni

bir kirişler dörtgenidir. Benzer şekilde  $m(\widehat{AZC}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2} = 36^\circ$  olduğundan  $CBZD$  dörtgeni de bir kirişler dörtgenidir.

Dolayısıyla  $BCDZE$  beşgeninin köşeleri  $A$  merkezli çemberin üzerindedir. Yani  $|AC| = |AD|$  ve  $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ADC}) = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$  olur ve bunların sonucunda  $m(\widehat{ADP}) = 36^\circ$  ve  $m(\widehat{APD}) = 108^\circ$  olarak bulunur.

**İkinci Çözüm.** Aşağıdaki resimde de görülebileceği gibi  $BB_1$  ve  $DD_1$  doğruları sırasıyla  $\widehat{DBC}_1$  ve  $\widehat{BDC}_1$  açılarının açı ortaylarıdır.



Dolayısıyla  $C$  noktası  $BDC$  üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir. Bu durumda

$$m(\widehat{DC_1A}) = m(\widehat{AC_1B}) = 36^\circ, \quad m(\widehat{DPA}) = \frac{72^\circ + 144^\circ}{2} = 108^\circ$$

olduğu açıkça görülür.

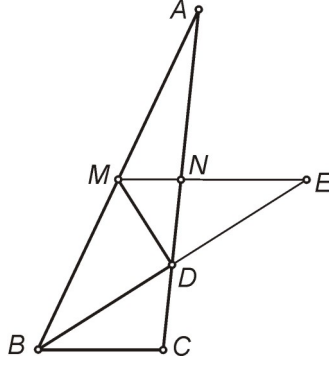
50.  $A$  ve  $B$  köşelerinden çizilen kenarortayların dik kesiştiği bir  $ABC$  üçgeninde en kısa kenarın  $AB$  olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm:**  $A$  ve  $B$  köşelerinden çizilen kenarortayların kesiştiği nokta  $M$ ,  $C$  köşesinden çizilen kenarortayın  $AB$  kenarını kestiği nokta  $F$  olsun. Bu durumda  $F$ ,  $ABM$  dik üçgeninin hipotenüsünün orta noktası, dolayısıyla da  $ABM$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir. Bu da  $|AB| = 2|FM|$  olduğunu gösterir.  $M$ ,  $CF$  kenarortayını  $2 : 1$  oranında böldüğü için  $|AB| = |CM|$  olur.  $AMC$  üçgeninin en büyük açısı, bir geniş açı olan,  $\widehat{AMC}$  dir. O halde  $|AC|$  bu üçgenin en uzun kenarıdır. Buradan  $|AC| \geq |MC| = |AB|$  olduğu sonucu çıkar. Benzer şekilde  $|BC| \geq |AB|$  olduğu da ispatlanabilir.

$m(\widehat{DEC}) = \frac{m(\widehat{DAC})}{2} = 18^\circ = m(\widehat{CBD})$  'dir. Buradan,  $A$  noktası merkez olmak üzere,  $DEBC$  dörtgeninin köşelerinin bir çember üzerine yerleştirilebileceği (çembelsel olduğu) sonucu çıkar.

51.  $ABC$  üçgeninde  $AB$  kenarının orta noktası  $M$  ve  $ABC$  açısının açıortayının  $AC$  kenarı ile kesiştiği nokta  $D$  olsun.  $MD \perp BD$  ise,  $|AB| = 3|BC|$  olduğunu gösteriniz.

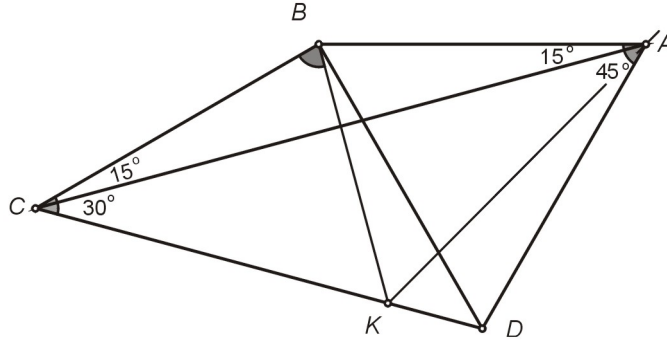
**Çözüm:**  $AC$  kenarının orta noktasına  $N$  diyelim ve bu noktayı  $M$  noktası ile birleştirelim.  $B$  köşesi ile  $D$  noktasını da birleştirelim.



$MN$  doğru parçası  $BC$  kenarına paralel olacaktır.  $MN$  ile  $BD$  nin kesiştiği noktaya  $P$  dersek  $MBP$  üçgeni ikizkenar ve  $|BD| = |DP|$  olur. Ayrıca  $NDP$  ve  $CDB$  üçgenleri eş üçgenlerdir. Dolayısıyla  $|ND| = |DC|$  ve  $|AN| = 2$  birim,  $|ND| = |DC| = 1$  birim olduğu elde edilir.  $BD$  açıortay olduğu için  $3 = \frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$  bulunur.

52. Bir  $ABCD$  dörtgeninde  $m(\widehat{CAD}) = 45^\circ$ ,  $m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 15^\circ$  olduğuna göre  $DBC$  açısının değeri nedir?

**Çözüm.**  $CD$  kenarı üzerinde,  $m(\widehat{CAK}) = 30^\circ$  olacak şekilde bir  $K$  noktası olsun.



Bu durumda  $AKC$  üçgeni  $m(\widehat{CAK}) = m(\widehat{ACK}) = 30^\circ$  olduğundan, bir ikizkenar üçgen olur. Ayrıca soruda verildiği üzere  $ABC$  üçgeni de ikizkenar olduğundan,



$KB \perp AC$  olur ve dolayısıyla  $m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{BKC}) = 60^\circ$  ve  $m(\widehat{AKD}) = 60^\circ$  olduğu görülür. Bunların dışında,

$$\begin{aligned} m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BKD}) &= m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAD}) + m(\widehat{BKA}) + m(\widehat{AKD}) \\ &= 15^\circ + 45^\circ + 60^\circ + 60^\circ \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

olduğu için  $A, B, K$  ve  $D$  noktaları bir çember üzerindedir. Dolayısıyla  $m(\widehat{DBK}) = m(\widehat{DAK}) = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$  olduğunu görür ve buradan da sonucu yani

$$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DBK}) + m(\widehat{KBC}) = 15^\circ + (90^\circ - m(\widehat{BCA})) = 15^\circ + (90^\circ - 15^\circ) = 90^\circ$$

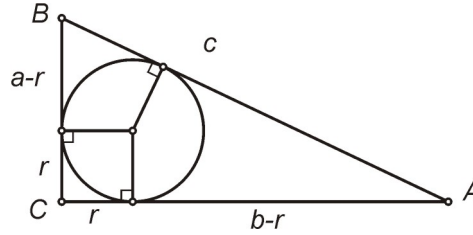
değerini buluruz.

53. Bir dik üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı  $R$ , iç teğet çemberinin yarıçapı  $r$  olmak üzere

$$R \geq r(1 + \sqrt{2})$$

olduğunu gösteriniz.

**Birinci Çözüm.** Bir dik üçgende  $c = 2R$  ve  $(a-r) + (b-r) = c$ , yani  $a+b = c+2r$  olduğu açıktır.



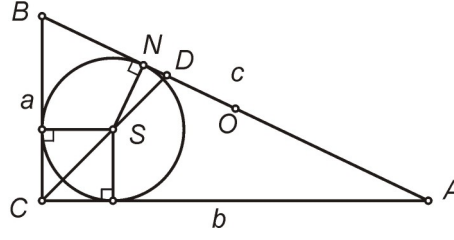
Bu durumda  $(a-b)^2 \geq 0$  olduğundan,  $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ , yani  $\sqrt{2}c \geq a+b$  olduğu görülür. Son eşitsizliği ve  $a+b = c+2r$  denklemini birleştirerek,

$$c+2r \leq \sqrt{2}c, \text{ yani } 2R+2r \leq 2\sqrt{2}R$$

elde edilir.

Dolayısıyla  $(\sqrt{2}-1)R \geq r$ , yani  $R \geq (1+\sqrt{2})r$  olduğu görülür.

**İkinci Çözüm.** Bu üçgende iç teğet çemberin merkezi  $S$ , çevrel çemberin merkezi  $O$ , hipotenüsle iç teğet çemberin kesiştiği nokta  $N$ , dik açının açı ortayının hipotenüsle kesiştiği nokta ise  $D$  noktası olsun.



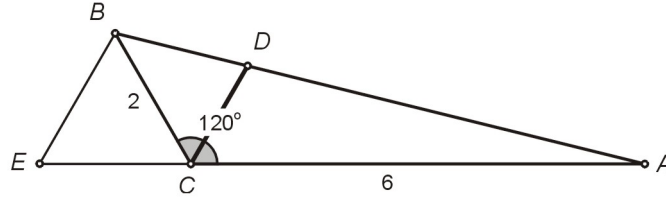
Bu durumda,

$$r(\sqrt{2} + 1) = r\sqrt{2} + r = |CS| + |SN| \leq |CS| + |SD| = |CD| \leq |CO| = R$$

olduğu görülür. Burada dikkat edilecek husus  $a = b$  durumunda  $D$  ve  $N$  noktalarının çakışık olacağıdır. Ancak bu durumda yukarıdaki ifadenin eşitlik durumunun sağlandığı kolayca görülebilir.

54.  $|AC| = 6$ ,  $|BC| = 2$  ve  $m(\widehat{ACB}) = 120^\circ$  olan bir  $ABC$  üçgeninin  $\widehat{ACB}$  açısının açı ortayı  $AB$  kenarıyla  $D$  noktasında kesişiyor. Bu durumda  $CD$  doğru parçasının uzunluğunu bulunuz.

**Çözüm.**  $AC$  doğrusu üzerinde bir  $E$  noktası,  $C$  noktası  $A$  ve  $E$  noktaları arasında kalacak ve  $|CE| = |CB|$  olacak şekilde olsun.



Bu durumda  $ECB$  üçgeni bir eşkenar üçgen ve  $BE \parallel DC$  olduğu görülür. Dolayısıyla  $ACD$  ve  $AEB$  üçgenleri benzer üçgenler olduğundan,

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|AE|} \Rightarrow |CD| = \frac{3}{2}$$

elde edilir.

55.  $R$  çevrel çemberin yarıçapı olmak üzere,  $R(b + c) = a\sqrt{bc}$  koşulunu sağlayan  $ABC$  üçgenini bulunuz.

**Çözüm.** Bir çemberde çap herhangi bir kirişden daha kısa değildir, dolayısıyla  $2R \geq a$  olur.  $AO - GO$  eşitsizliğinden  $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$  elde edilir. Dolayısıyla  $R(b + c) \geq a\sqrt{bc}$  olur. Eşitlik  $a = 2R$  ve  $b = c$  olduğu zaman sağlanır. Bu koşulları sağlayan üçgen, bir ikizkenar dik üçgendir.

56. Bir kenarı  $\alpha$  olan  $ABC$  eşkenar üçgeninin dışına  $m(\widehat{CAD}) = 90^\circ$  olan  $ACD$  ikizkenar üçgeni çiziliyor. Burada  $DA$  ve  $CB$  kenarları  $E$  noktasında kesiştiğine göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

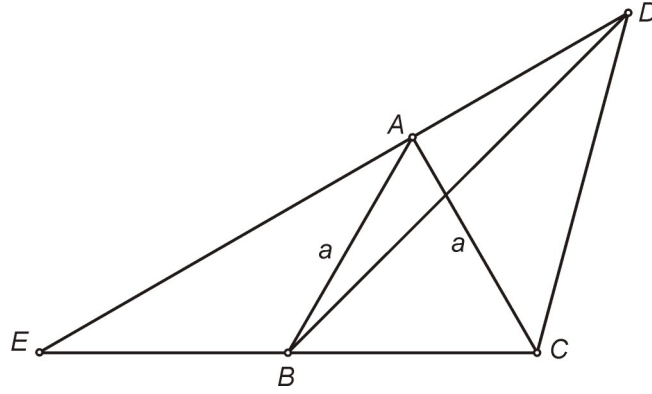
- (a)  $\widehat{DBC}$  açısının ölçüsünü bulunuz.  
 (b)  $CDE$  üçgeninin alanını  $\alpha$  cinsinden bulunuz.  
 (c)  $BD$  doğru parçasının uzunluğunu  $\alpha$  cinsinden bulunuz.

**Çözüm.**

- (a)  $|AB| = |AD| = \alpha$  olduğundan,  $ABD$  üçgeni ikizkenar üçgendir ve

$$m(\widehat{ABD}) = \frac{180^\circ - (60^\circ + 90^\circ)}{2} = 15^\circ$$

olur.



Dolayısıyla  $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{ABD}) = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$  olarak bulunur.

- (b)  $m(\widehat{ACE}) = 60^\circ$  ve  $m(\widehat{AEC}) = 30^\circ$  olduğundan  $ACE$  üçgeni bir dik üçgendir.

Dolayısıyla  $|CE| = 2 \cdot |AC| = 2\alpha$  ve  $|AE| = \frac{2\alpha\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}$  olur. Buradan da  $|DE| = \alpha + \alpha\sqrt{3}$  olarak bulunur. Bu durumda

$$Alan(CDE) = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \alpha\sqrt{3}) \cdot \alpha = \frac{\alpha^2(1 + \sqrt{3})}{2}$$

olduğu görülür.

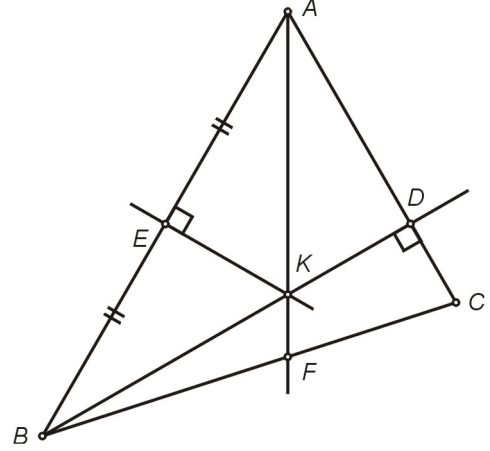
- (c)  $CBD$  ve  $CDE$  üçgenlerinin açıları birbirine eşit olduğu için bu üçgenler benzer üçgenlerdir. Dolayısıyla

$$\frac{|BD|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|CD|} \Leftrightarrow \frac{|BD|}{\alpha(1 + \sqrt{3})} = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{2}} \Rightarrow |BD| = \frac{\alpha(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{2}} \Rightarrow |BD| = \frac{\alpha(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$$

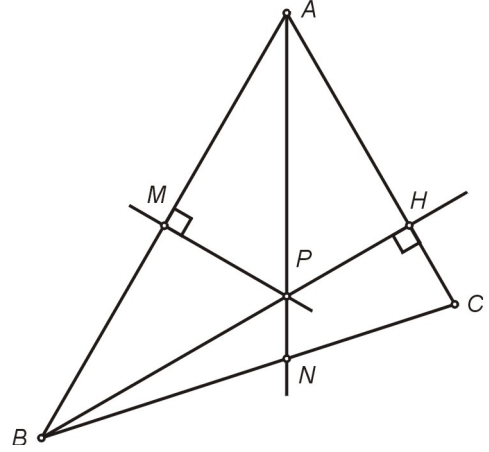
olduğu görülür.

57. Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninde,  $BAC$  açısının açı ortayı,  $B$  köşesinden çizilen yükseklik ve  $AB$  kenarına ait kenar orta dikme bir noktada kesişmelerinin ancak ve ancak  $m(\widehat{A}) = 60^\circ$  olduğu zaman mümkün olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.** Şekilde gösterildiği gibi  $[AF]$  açıortayı,  $[BD]$  yüksekliği ve  $[EK]$  kenar orta dikmesi,  $K$  noktasında kesişsinler.  $m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{FAC}) = \alpha$  olsun.  $ABK$  üçgeninde,  $|AE| = |EB|$  ve  $[EK] \perp [AB]$  olduğu için,  $ABK$  üçgeni ikizkenar bir üçgendir ve  $m(\widehat{ABK}) = \alpha$  olur. Şimdi,  $ABD$  üçgeninde iç açılar toplamı  $180^\circ$  olduğu için,  $\alpha = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$  elde edilir.



Öteki taraftan,  $m(\widehat{A}) = 60^\circ$  olsun. Şekilde gösterildiği gibi,  $[AN]$  açıortayı ve  $[BH]$  yüksekliği bir  $P$  noktasında kesişsinler.  $[AN]$  açıortay olduğu için,  $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{NAC}) = 30^\circ$  olur.  $ABH$  üçgeninde iç açılar toplamı  $180^\circ$  olduğu için,  $m(\widehat{HBA}) = 30^\circ$  dir. Şimdi,  $ABP$  üçgeni bir ikizkenar üçgen olduğu için,  $P$  noktasından çizilen yükseklik tabanı ortalar, yani  $[PM]$  yüksekliği orta dikmedir.



58. Birim kareye sığabilecek en büyük yarım dairenin alanını bulunuz.

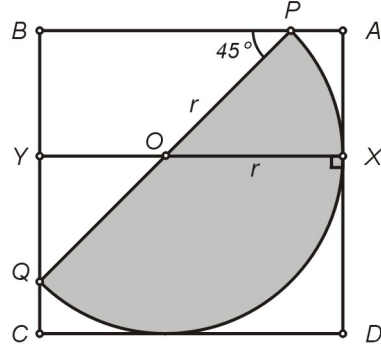
**Çözüm.** Yarım dairenin, karenin kenarlarına teğet olacağı açıktır. Olası bir çözüm, karenin bir kenarını çap olarak alan bir yarım dairedir. Bu yarım dairenin çapı 1 birim olacaktır. Alanı ise

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx 0,3927$$

olur.

Yarım dairenin alanının en büyük olması için komşu iki kenara teğet olması gerekir.

Şekil  $BD$  köşegenine göre simetrik olduğu için  $m(\widehat{QPB}) = 45^\circ$ .  $X$  noktasından geçen ve  $AB$  kenarına paralel olan bir doğru yarım dairenin merkezinden geçer.



$$|OY| = r \cdot \cos(45^\circ) = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ olduğundan}$$

$$1 = |AB| = r + \frac{r}{\sqrt{2}} = r\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

elde edilir. Buradan da yarım dairenin yarı çapı

$$r = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 - \sqrt{2}$$

olarak bulunur. Yarıçapı  $2 - \sqrt{2}$  olan yarım dairenin alanı da,

$$\frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = \pi(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0,539$$

dur.

59.  $ABC$ ,  $|AC| = |BC|$  olacak şekilde bir ikizkenar üçgen olsun. Bu üçgenin çevrel çemberinin,  $C$  noktasını içermeyen  $AB$  yayının üzerindeki bir noktaya  $P$  noktası diyelim.  $C$  noktasından  $PB$  doğru parçası üzerine indirilen dikme ayağına ise  $D$  noktası diyelim. Bu durumda,

$$|PA| + |PB| = 2|PD|$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi,  $PB$  doğru parçasını  $|BM| = |AP|$  olacak şekilde uzatalım. Burada  $m(\widehat{CBP}) = 180^\circ - m(\widehat{CAP})$  olduğundan  $m(\widehat{CAP}) = m(\widehat{CBM})$  bulunur. Bu durumda  $|CA| = |CB|$  ve  $|AP| = |BM|$  olduğundan  $BCM$  ve  $ACP$  üçgenleri eş üçgenler olur. Dolayısıyla  $|CP| = |CM|$  olur ve  $CPM$  üçgeni de,  $CD$  doğru parçasını yükseklik olarak kabul eden ikizkenar üçgen olur. Sonuç



$AXY$  üçgeninde cosinüs teoreminden

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos A \\ &= x^2 + y^2 - 1 \quad (\cos A = 1/\sqrt{2}) \\ &= (x - y)^2 + (\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $z^2$  nin en küçük değeri,  $x = y$  iken  $z^2 = \sqrt{2} - 1$  olarak bulunur.

$xy = 1/\sqrt{2}$  olduğu için  $x = y = 1/\sqrt[4]{2}$  olur.

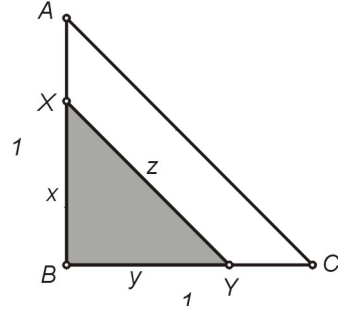
**2. durum:**  $Y$  noktası  $AB$  kenarı üzerinde ve  $|BY| = y$ ,  $X$  noktası  $BC$  kenarı üzerinde ve  $|BX| = x$  olsun.  $XY$  uzunluğu  $z$  olan bir kesittir.

$\text{Alan}(BXY) = xy/2$  dir.

$\text{Alan}(BXY) = 1/2 \cdot \text{Alan}(ABC)$  olduğundan,  $xy = 1/2$  bulunur.  $BXY$  üçgeninde pisagor teoreminden  $z^2 = x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 1$  elde edilir.

Dolayısıyla,  $z^2$  nin en küçük değeri,  $x = y$  iken  $z^2 = 1$  olarak bulunur. Bu 1. durumdan elde edilen uzunluktan daha uzundur.

Sonuç olarak, en kısa kesit 1. durumda elde edilen şekilde,  $|AX| = |BY| = 1/\sqrt[4]{2}$  ve kesit uzunluğu  $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$  olmalıdır. (Simetriden dolayı, benzer kesit  $BC$  kenarından  $AB$  kenarına çizilerek de elde edilebilir.)



61.  $ABC$  ikizkenar üçgeninin, sırasıyla eşkenarlar  $AB$  ve  $AC$  üzerinde  $P$  ve  $Q$  noktaları,  $|AP| = |CQ|$  olacak şekilde bulunmaktadır. Bununla birlikte  $P$  ya da  $Q$ ,  $ABC$  üçgeninin bir köşesi değildir. Bu durumda  $APQ$  üçgeninin çevrel çemberinin  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezinden geçtiğini gösteriniz.

**Çözüm.**  $PQ$  ve  $AC$ 'nin orta dikmelerinin kesiştiği nokta  $O$  olsun. Bu durumda,  $|OP| = |OQ|$ ,  $|OA| = |OC|$  ve  $|AP| = |CQ|$  olduğundan,  $APO$  ve  $CQO$  eş üçgenlerdir. Dolayısıyla  $m(\widehat{CQO}) = m(\widehat{APO})$  olduğu için  $APQ$  dörtgeninin bir çember üzerinde olduğu görülür. Ayrıca  $m(\widehat{OCQ}) = m(\widehat{OAP}) = m(\widehat{OQP}) = m(\widehat{OPQ}) = m(\widehat{OAQ})$  olduğundan  $OA$ ,  $BAC$  açısının açıortayıdır ve  $ABC$  ikizkenar üçgen olduğu için aynı zamanda  $BC$  kenarının orta dikmesidir.

Bu durumda  $O$  hem  $BC$  kenarının hem de  $AC$  kenarının orta dikmesi üzerinde olduğundan  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.

62. Bir  $ABCD$  konveks dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası  $M$  olmak üzere  $AB$  kenarını  $P$  noktasında,  $CD$  kenarını  $Q$  noktasında kesen ve  $M$  noktasından geçen  $g$  doğrusu dikkate alındığında  $APM$ ,  $BPM$ ,  $CQM$  ve  $DQM$  üçgenleri benzer olan

- 445

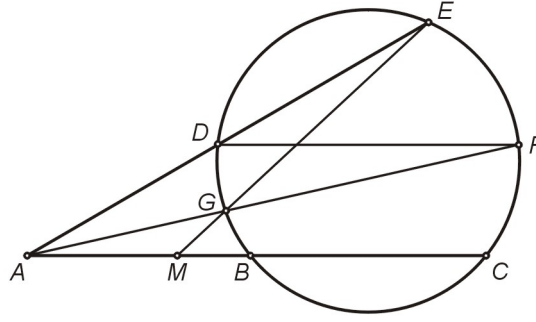


ve  $m(\widehat{MAP}) + m(\widehat{AMP}) = 90^\circ$ . Yani,  $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AMP}) + m(\widehat{BMP}) = 90^\circ$  dir. Buradan  $ABCD$  yamuğunun köşegenlerinin birbirlerine dik olduğu bulunmuş olur. Dolayısıyla,  $APM \approx BPM \approx CQM \approx DQM$  dir.

63. Bir çembere dışındaki bir  $A$  noktasından çizilen iki doğru, çemberi sırasıyla  $B, C$  ve  $D, E$  noktalarında kesmektedir. ( $B \in [AC]$  ve  $D \in [AE]$  dir.)  $D$  noktasından  $[BC]$  ye çizilen paralel, çemberi  $F$  noktasında kesmektedir.  $A$  ve  $F$  noktalarından geçen doğrunun çemberi kestiği ikinci nokta  $G$  olsun.  $E, G$  noktalarından geçen doğru,  $[AC]$  yi  $M$  noktasında kestiğine göre

$$\frac{1}{|AM|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$$

olduğunu kanıtlayınız.

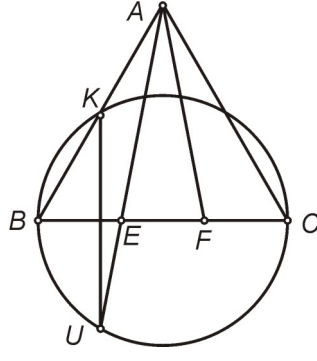


**Çözüm.**  $[DF] \parallel [AC]$  olduğu için  $m(\widehat{DFA}) = m(\widehat{FAC})$  dir. Öteki taraftan,  $\widehat{DFA}$  ve  $\widehat{DEG}$  aynı yayı gören çevre açılar olduklarından ölçüleri eşittir ve  $m(\widehat{CAF}) = m(\widehat{DEG})$  dir. Dolayısıyla,  $AMG$  ve  $EMA$  üçgenleri benzerdir. Benzerlikten,  $\frac{|AM|}{|MG|} = \frac{|EM|}{|AM|}$  ya da  $|AM|^2 = |MG| \cdot |EM|$  elde edilir.

$M$  noktasının çembere göre kuvvetinden,  $|MG| \cdot |EM| = |MB| \cdot |MC|$  yazılır. Dolayısıyla,  $|AM|^2 = |MB| \cdot |MC| = (|AB| - |AM|)(|AC| - |AM|) = |AB| \cdot |AC| - |AM|(|AB| + |AC|) + |AM|^2$  buradan da  $|AB| \cdot |AC| = |AM|(|AB| + |AC|)$  bulunur. Son eşitliğin her tarafı  $|AM| \cdot |AB| \cdot |AC|$  ye bölünürse istenen ifade elde edilir.

64.  $ABC$  bir eşkenar üçgen ve  $P$ , çapı  $BC$  kenarı olan  $A$  köşesinden uzak olan yarımdairedir.  $A$  köşesinden geçen ve  $BC$  yi üç eş parçaya ayıran doğruların  $P$  yarımdairesini de üç eş parçaya ayırdığını gösteriniz.

**Çözüm:**  $E$  ve  $F$  noktaları,  $BC$  kenarını sırasıyla  $BE, EF$  ve  $FC$  olmak üzere üç eşit parçaya ayıran noktalar olsun.  $AE$  doğrusu ile  $P$  yarımdairesi  $U$  noktasında kesişsin. Yarımdaireyi tam daireye tamamladığımızda  $AB$  ve  $AC$  kenarları ile üst yarımdaire  $P', K$  ve  $L$  noktalarında kesişsinler.

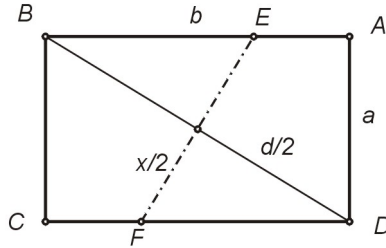


$BKC$  açısı çapı gördüğü için bir dik açıdır. Ayrıca  $|BC| = |AC|$  olduğu için  $KC$  kenarortaydır, aynı zamanda açıortaydır, yani  $K$ ,  $AB$  nin orta noktasıdır ve  $m(\widehat{BCK}) = 30^\circ$  dir. Benzer şekilde  $m(\widehat{CBL}) = 30^\circ$  dir. Böylece  $K$  ve  $L$ ,  $P'$  yarımdairesini üç eşit parçaya böler. Dolayısıyla  $K$  noktasının,  $BC$  kenarına göre,  $U$  noktasının simetriği olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$E$  de  $BF$  nin orta noktası olduğu için  $KE$  ile  $AF$  paraleldir. O halde  $m(\widehat{BEU}) = m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{KEB})$  olur. Dolayısıyla  $U$  ve  $K$ ,  $BC$  çapına göre simetriktir.

65. Dikdörtgen şeklindeki bir kağıt, köşegen oluşturan iki köşesi üst üste gelecek şekilde katlanıyor. Kat yerinin oluşturduğu yeni kenarın (üst üste gelen köşelerin karşısındaki kenar) uzunluğu, dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğuna eşitse dikdörtgenin uzun kenarının kısa kenarına oranı nedir?

**Çözüm.**  $ABCD$ 'yi katladığımız kağıt olarak alalım.  $a \leq b$  olacak şekilde  $AD = a$ ,  $AB = b$  olsun. Katlama sonunda oluşan yeni kenara  $EF$  ve uzunluğuna  $x$  diyelim. Köşegen uzunluğu da  $d^2 = a^2 + b^2$  olacaktır.



Simetriden dolayı  $BD$  köşegeni ve  $EF$  dik kesişecek ve birbirlerini iki eş parçaya böleceklerdir.  $DAB$  üçgeni ve  $XEB$  üçgeni iki ortak açıya sahip oldukları için  $(m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{XBE})$  ve

$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{XEB})$  benzer üçgenlerdir:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{x}{d}$$

O halde

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{(a^2 + b^2)} \quad (12)$$

$EF$  nin uzunluğu, dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğuna eşit olduğundan  $x = b$  dir. (12) de yerine yazarsak:

$$\begin{aligned} b &= \frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2} \\ b^2 &= \frac{a^2}{b^2} (a^2 + b^2) \\ b^4 &= a^2 (a^2 + b^2) \\ 0 &= b^4 - a^2 b^2 - a^4 \end{aligned}$$

Denklemini çözersek

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^4}}{2} \\ &= \frac{a^2(1 \pm \sqrt{5})}{2} \end{aligned}$$

bulunur.  $a, b \geq 0$  olduğu için negatif kökü gözardı edersek uzun kenarın kısa kenara oranı

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

olur.

66.  $ABCD$  karesi ile  $ABEF$  karesinin bulunduğu düzlemler birbirlerine diktir.  $AE$  ve  $BF$  doğruları  $O$  noktasında kesişiyor ve  $|AE| = 4$  cm ise

- (a)  $B$  noktasından  $DOC$  ve  $DAF$  düzlemlerinin kesiştiği doğruya olan uzaklığını
- (b)  $AC$  ve  $BF$  doğruları arasındaki uzaklığı

bulunuz.

**Çözüm:**  $E$  ve  $F$  noktalarından sırasıyla  $C$  ve  $D$  noktalarına 4 cm uzaklıkta olan  $E'$  ve  $F'$  noktalarını kullanarak  $ABEFCDE'F'$  küpünü oluşturalım.

- (a)  $DOC$  düzlemi  $AF$  kenarı ile  $M$  noktasından kesişsin.  $DC$ ,  $ABEF$  ile paralel olduğundan  $OM$  'de  $DC$  'ye paraleldir. O halde  $M$ ,  $AF$  'nin orta noktası

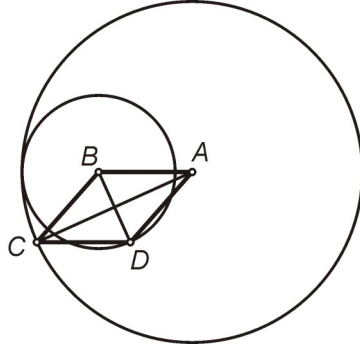
ve  $DM$  'de  $DOC$  ve  $DAF$  düzlemlerinin kesişim doğrusudur. Dolayısıyla istenilen uzaklık  $B$  'den  $MD$  'ye olan uzaklıktır. Burada uzaklık  $|MB| = |MD| = 2\sqrt{5}$  ve  $|BD| = 4\sqrt{2}$  'dir. Buradan  $BDM$  'nin alanı da  $4\sqrt{6}$  olarak bulunur. O halde  $B$  'den  $MD$  doğrusuna olan dik uzaklık  $\frac{4\sqrt{30}}{5}$  'tir.

- (b)  $BF$  ve  $AC$  doğruları  $E'BF$  ve  $ACF'$  paralel düzlemlerinde yer almaktadır. O halde aralarındaki uzaklık bulundukları düzlemler arasındaki uzaklığa eşittir.  $DE$ ,  $E'BF$  ve  $ACF'$  düzlemlerine dik ve bu düzlemler tarafından 3 eşit parçaya bölünüğünden bu düzlemler arasındaki uzaklık

$$\frac{1}{3} \cdot |DE| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

olarak bulunur.

67. Çevresi  $40 \text{ cm}$  olan  $ABCD$  eşkenar dörtgenininin  $A$  köşesini merkez olarak alan çember  $C$ ,  $B$  köşesini merkez olarak alan çember ise  $D$  noktasından geçmektedir. Bu iki çember birbirlerine teğet ise,  $ABCD$  eşkenar dörtgeninin alanı kaç  $\text{cm}^2$ dir?



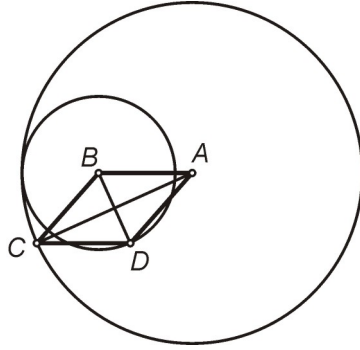
**Çözüm:**  $ABCD$ , eşkenar dörtgen olduğu için, köşegenleri birbirlerini orta noktalarından keserler. Ayrıca köşegenler dik kesişirler.

(Dik kesiştiklerinin küçük bir ispatı vektörler kullanılarak yapılabilir:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  ve  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$  olduğundan,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}|$ , olduğundan  $|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$  yani  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$  dır. Dolayısıyla  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$



Büyük çemberim yarı çapına  $R$  ( $= |AC|$ ), küçük çemberin yarı çapına  $r$  ( $= |BD|$ ) diyelim. Dörtgenin alanı, içindeki dört eş üçgenin alanlarının toplamına eşittir:

$$A(ABCD) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{R}{2} \cdot \frac{r}{2} \right) = \frac{R \cdot r}{2}$$

Ayrıca Pisagor bağıntısından,  $\left( \frac{R}{2} \right)^2 + \left( \frac{r}{2} \right)^2 = 10^2$ , olduğundan  $R^2 + r^2 = 400$  dır. İki çemberin merkezi aynı doğru üzerinde olduğu için iki çemberin teğet olduğu nokta da bu doğru üzerindedir.  $AB$  doğru parçasını uzatalım. Bu yeni doğru parçası çemberleri teğet noktasında kesecektir. Bu noktaya  $E$  dersek,  $|AE| = R$ ,  $|AB| = 10$  ve  $|BE| = r$  olduğundan  $R - r = 10$  olur. O halde;

$$(R - r)^2 = 10^2$$

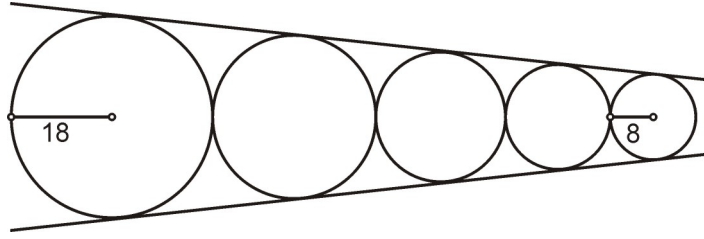
$$R^2 - 2 \cdot R \cdot r + r^2 = 100$$

$$R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r = 400 - 2 \cdot R \cdot r = 100$$

$$R \cdot r = 150$$

O halde  $ABCD$  eşkenar dörtgeninin alanı  $\frac{R \cdot r}{2} = 75 \text{ cm}^2$  dir.

68. Değişik boyutlardaki beş bilye konik biçimindeki bir huniye koyuluyor. Her bilye bitişikindeki bilyelerle ve huni yüzeyiyle temas halindedir.

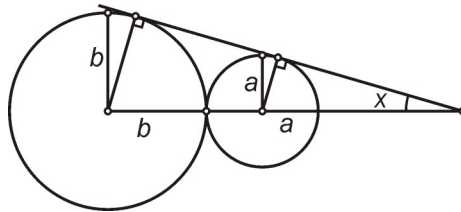
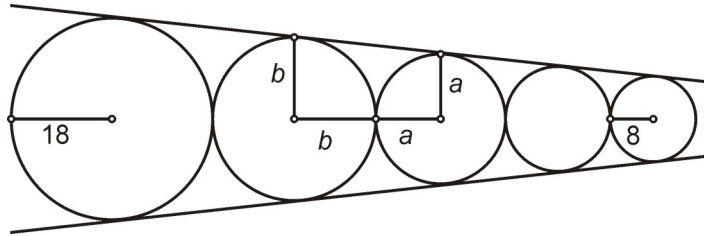


En küçük bilyenin yarıçapı 8, en büyük bilyenin yarıçapı 18 milimetredir. Ortadaki bilyenin yarıçapını bulunuz.

**Çözüm:** Cevap 12 milimetredir. Bitişik iki bilyenin yarıçapları  $a < b$  olsun.  $\frac{b}{a}$ 'nın sadece huninin yüzeyinin eğimine bağlı olan bir sabit olduğunu göstereceğiz.

Bilyeler birbirleri ile temas halinde oldukları için bilyelerin merkezlerinin uzaklığı  $a + b$ 'dir.

Bilyeler huni yüzeyiyle de temasta olduğu için ve huni yüzeyinin (enine kesitinin) eğimi sabit olduğu için, şekildeki iki taraflı üçgen benzerdir. Huni yüzeyinin dikey eksenle yaptığı açığa  $x$  dersek eğer,  $c = \sec(x)$  huni yüzeyinin eğimine bağlı olan bir sabittir. Dolayısıyla bilyelerin merkezlerinin huni duvarına olan yatay uzaklıkları  $bc$  ve  $ac$ 'dir.



Huni yüzeyinin eğimini  $m$  ile gösterelim. Dolayısıyla  $m = \frac{b+a}{(b-a)c}$  olur. Buradan  $\frac{b}{a} = \frac{mc+1}{mc-1}$  elde edilir.



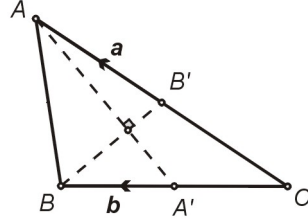
denklemlerini elde ederiz. Buradan,  $(1) - (2) + (3) - (4) \Rightarrow 0 = 5c^2/4 - 25/4$ .  
Dolayısıyla,  $c^2 = 5$  olur.

Bu yüzden,  $AB$  kenarının uzunluğu  $\sqrt{5}$  'dir.

### Vektörel Çözüm:

$C$  noktası orijin olsun.

$\overrightarrow{CA} = \vec{a}$  ve  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$  olsun.



$\overrightarrow{AA'}$  ve  $\overrightarrow{BB'}$  vektörleri birbirlerine dik olduklarından, iç çarpımları sıfırdır.

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

$AA' \perp BB' \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0$  'dır.

Bu yüzden  $(\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$  ve dolayısıyla  $5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2a^2 - 2b^2 = 0$  'dır.

$a = 4$  ve  $b = 3$  olduğu için,  $5\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(4^2 + 3^2) = 50$  olur.

Bu yüzden,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$  'dur. O halde,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= b^2 + a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 10 \\ &= 5 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,  $AB$  kenarının uzunluğu  $\sqrt{5}$  olur.

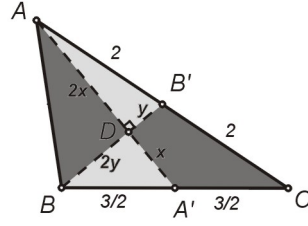
### Kenarortayların Bir Özelliği Kullanılarak Yapılan Geometrik Çözüm:

$AA'$  ve  $BB'$ ,  $D$  noktasında kesişirler.

Bu çözümde; bir üçgenin kenarortayları, üçgenin tepe noktasından karşı kenarın orta noktasına giden yolun  $2/3$ 'ünde kesişirler, sonucunu kullanacağız.

Bu yüzden,  $A'D = x$ ,  $DA = 2x$  ve  $B'D = y$ ,  $DB = 2y$  diyebiliriz.





Yukarıdaki şekilde gözüken üç dik üçgenin her birine Pisagor Teoremini uygulayarsak ;

$$\Delta A'DB \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 9/4 \quad (1)$$

$$\Delta ADB' \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 4 \quad (2)$$

$$\Delta ABD \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = c^2 \quad (3)$$

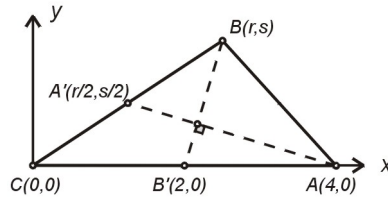
denklemlerini elde ederiz. Buradan,  $(1) + (2) \Rightarrow 5x^2 + 5y^2 = 25/4$  'dür.

Bu sonucu (3) ile birleştirecek,  $c^2 = (4/5) \times (25/4) = 5$  elde ederiz.

Dolayısıyla,  $AB$  kenarının uzunluğu  $\sqrt{5}$  olur.

### Kartezyen Çözüm:

Kartezyen çözüm, kısa olmasına rağmen, diğer çözümlere göre pek şık değildir. Burada, birbirlerine dik doğruların eğimlerinin çarpımı  $-1$  dir, gerçeğini kullanacağız.  $C$  noktası orijin olsun.  $A$  noktasının koordinatları  $(4, 0)$ ,  $B$  noktasının koordinatları ise  $(r, s)$  olsun.  $AA'$  ve  $BB'$  doğru parçalarının eğimlerinin zıt işaretli olmak zorunda olduklarına dikkat edelim. Bu yüzden,  $r > 2$  olur.



$BB'$  'in eğimi  $s/(r-2)$  ve  $AA'$  'in eğimi  $(s/2)/(r/2-4) = s/(r-8)$  'dir.

$AA' \perp BB' \Rightarrow AA'$  ve  $BB'$  'in eğimlerinin çarpımı  $-1$  'e eşittir.

Bu yüzden,  $s^2/(r-2)(r-8) = -1$  'dir. İfadeyi düzenlersek,  $s^2 = -r^2 + 10r - 16$  denklemini elde ederiz.

Ayrıca;  $BC = 3$  olduğu için,  $r^2 + s^2 = 9$  'dur. Buradan  $10r - 16 = 9$  ve dolayısıyla

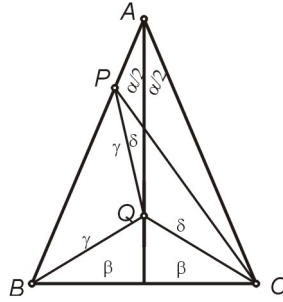
$r = 5/2$ 'dir. O halde,

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= s^2 + (4-r)^2 \\
 &= s^2 + r^2 - 8r + 16 \\
 &= 9 - 20 + 16 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,  $AB$  kenarının uzunluğu  $\sqrt{5}$  olur.

70.  $|AB| = |AC|$  ve  $m(\widehat{BAC}) = \alpha$  olan bir  $ABC$  üçgeninde  $P, P \neq B$  olan  $|AB|$  üzerinde bir nokta ve  $Q, A$  dan çizilen yükseklik üzerinde  $|PQ| = |QC|$  olacak şekilde bir nokta olsun.  $m(\widehat{QPC})$  kaçtır ?

**Çözüm.**  $|AB| = |AC|$  olduğu için  $A$  dan çizilen yükseklik aynı zamanda açıortaydır. Aynı zamanda  $|QB| = |QC| = |PQ|$  ve  $BQC, BQP, PQC$  üçgenleri ikizkenar olur.



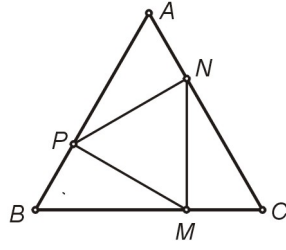
$m(\widehat{QBC}) = m(\widehat{QCB}) = \beta$ ,  $m(\widehat{QBP}) = m(\widehat{QPB}) = \gamma$  ve  $m(\widehat{QPC}) = m(\widehat{QCP}) = \delta$  ise  $m(\widehat{QCA}) = \gamma$  dir.  $ABC$  ve  $BPC$  birer üçgen oldukları için  $\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$  ve  $2\delta + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$  eşitliklerini kullanarak  $m(\widehat{QPC}) = \delta = \frac{\alpha}{2}$  bulunur.

71. **a** Kenarı  $a$  olan  $ABC$  eşkenar üçgeni veriliyor.  $MP \perp AB$ ,  $NM \perp BC$ ,  $PN \perp AC$  olmak üzere  $P \in [AB]$ ,  $M \in [BC]$ ,  $N \in [AC]$  noktalarının oluşturduğu  $MNP$  üçgeni için  $MP$  uzunluğunu bulunuz.
- b** Her  $ABC$  dar açılı üçgeni için  $MP \perp AB$ ,  $NM \perp BC$ ,  $PN \perp AC$  olacak şekilde  $P \in [AB]$ ,  $M \in [BC]$ ,  $N \in [AC]$  noktalarının bulunabileceğini gösteriniz.

**Çözüm.**

- a**  $NPM$  ve  $ABC$  üçgenleri benzer üçgenlerdir. Dolayısıyla,  $NPM$  üçgeni de eşkenar üçgendir. Yani,  $\triangle APN \equiv \triangle BMP \equiv \triangle CNM$  dir. Eğer  $|AP| = x$  ise  $|AN| = \frac{x}{2}$  ve  $|NC| = a - \frac{x}{2}$  olur. Ayrıca  $|AP| = |NC|$  olduğu için  $x = a - \frac{x}{2}$  ve  $x = \frac{2a}{3}$  bulunur. Buradan  $|PN| = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  bulunur.

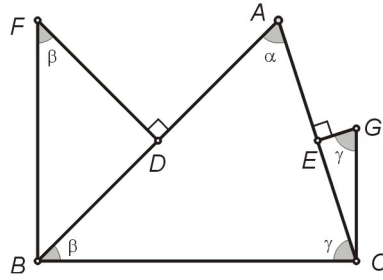
- b**  $AB$  üzerinde herhangi bir  $P_0$  noktası alınsın ve  $P_0$  noktasının  $|AC|$  üzerindeki izdüşüm noktası  $N_0$  olsun.  $M_0, N_0$  noktasından  $BC$  ye çizilen izdüşüm ile  $AB$



doğrusuna  $P_0$  noktasından çizilen dikmenin kesişim noktası olsun.  $AM_0$  nin  $BC$  ile  $M$  noktasında kesiştiğini varsayalım.  $A$  merkezli homoteti ve  $\frac{AM}{AM_0}$  oranı  $M_0N_0P_0$  üçgenini  $MNP$  üçgenine götürür.

72.  $BAC$  açısı sabit kalmak üzere,  $B$  ve  $C$  noktaları sabit,  $A$  noktası değişkendir. Burada  $AB$  ve  $AC$  kenarlarının orta noktaları sırasıyla  $D$  ve  $E$  noktaları olsun. Ayrıca  $DF \perp AB$ ,  $EG \perp AC$  ve  $BF$  ile  $CG$  doğruları  $BC$  doğrusuna dik olacak şekilde  $F$  ve  $G$  noktaları olsun. Bu durumda  $|BF| \cdot |CG|$  çarpımının  $A$  noktasının seçiminden bağımsız olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $ABC$  üçgeninin açılarına  $\alpha, \beta, \gamma$  diyelim.



Bu durumda

$$|BF| = \frac{|AB|}{2 \sin \beta}, |CG| = \frac{|AC|}{2 \sin \gamma}$$

eşitliklerinden

$$|BF| \cdot |CG| = \frac{1}{4} \cdot \frac{|AB|}{\sin \gamma} \cdot \frac{|AC|}{\sin \beta} = \frac{1}{4} \left( \frac{|BC|}{\sin \alpha} \right)^2$$

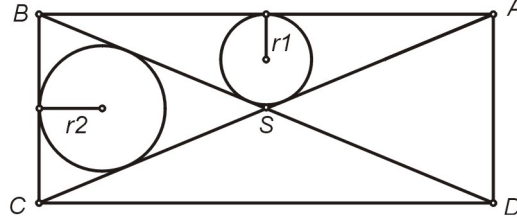
denklemini elde ederiz.

Denklemden de açıkça görüldüğü gibi sonuç  $A$  noktasının pozisyonundan bağımsızdır.

73. Bir dikdörtgenin kenarları oranı  $12 : 5$  tir. Köşegenlerin oluşturduğu 4 üçgenden bir kenarı komşu olanların içine çizilen çemberlerin yarıçapları  $r_1$  ve  $r_2$  olmak üzere  $r_1 : r_2$  oranını bulunuz.

**Çözüm.** Köşegenlerin kesim noktasına  $S$  diyelim.  $ABS$  ve  $BCS$  üçgenlerini gözönüne alalım.  $ABS$  üçgeninin içinde kalan çemberin yarıçapı  $r_1$ , üçgenin çevresinin yarısı

$s_1$  ve  $BCS$  üçgeninin içinde kalan çemberin yarıçapı  $r_2$ , üçgenin çevresinin yarısı  $s_2$  olsun. Üçgenlerinin alanları eşit olduğu için  $r_1 s_1 = r_2 s_2$  dir. Denklem düzenlenirse  $r_1 : r_2 = s_2 : s_1$  bulunur.  $|AB| = a, |BC| = b$  olsun. Köşegen uzunluğu  $d$  ise  $s_1 = \frac{\frac{d}{2} + \frac{d}{2} + a}{2} = \frac{a+d}{2}$  dir. Benzer şekilde  $s_2 = \frac{b+d}{2}$  dir. Yani,  $r_1 : r_2 = (b+d) : (a+d)$  dir.



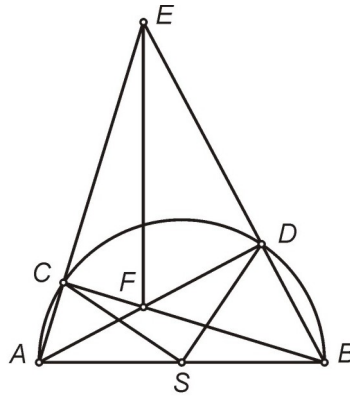
$a = 12k$  ve  $b = 5k$  dersek, Pisagor teoreminden dolayı  $d^2 = a^2 + b^2 = (12k)^2 + (5k)^2 = 169k^2$  olur. Buradan  $d = 13k$  dir. Sonuç olarak  $r_1 : r_2 = (13k + 5k) : (13k + 12k) = 18 : 25$  bulunur.

74. Çapı  $\overline{AB}$  merkezi  $S$  olan yarıçember üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan  $C$  ve  $D$  noktaları verilsin.

- i  $C$  noktası  $AD$  yayı üzerindedir,
- ii  $CSD$  açısı dik açıdır.

$E$  noktası  $AC$  ve  $BD$  doğrularının kesişim noktası ve  $F$  noktası  $AD$  ve  $BC$  doğrularının kesişim noktası ise  $|EF| = |AB|$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $C$  ve  $D$  noktaları çember üzerinde oldukları için Thales teoremine göre  $AD \perp BD$  ve  $BC \perp AC$  dir.



$F$  noktası  $ABE$  üçgeninin yüksekliklerin kesim noktasıdır yani  $EF \perp AB$  dir.  $CSD$  açısı  $90^\circ$  olduğu için  $CAD$  açısı  $45^\circ$  dir. Dolayısıyla  $ACF$  üçgeni ikizkenar diküçgendir.

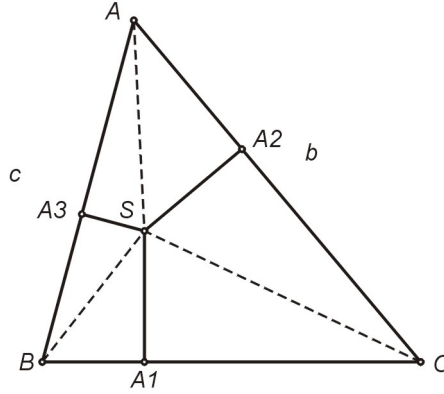
Ayrıca,  $m(\widehat{ECF}) = m(\widehat{BCA}) = 90^\circ$  ve  $m(\widehat{EFC}) = m(\widehat{BAC})$  dir. Dolayısıyla  $ECF$  ve  $BCA$  üçgenleri denktir yani  $|EF| = |AB|$  dir. Sonuç olarak  $|EF|$ ,  $C$  ve  $D$  noktalarının seçimlerinden bağımsızdır.

75. Bir üçgenin içindeki noktalardan kenara uzunlukları çarpımı en büyük noktanın ağırlık merkezi olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $ABC$  üçgeni ve bu üçgenin içinde bir  $S$  noktası alalım.  $l_1$ ,  $l_2$  ve  $l_3$   $S$  noktasının  $a$ ,  $b$ ,  $c$  kenarlarına uzaklıkları olsun. Aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(al_1).(bl_2).(cl_3) \leq \left( \frac{al_1 + bl_2 + cl_3}{3} \right)^3 = \left( \frac{2}{3} Alan(ABC) \right)^3.$$

Sağ taraf  $S$  noktasının seçiminden bağımsız olduğu için sol tarafın maksimumu için eşitlik elde edilerek bulunabilir yani  $al_1 = bl_2 = cl_3$  olmalı.



$al_1 = bl_2 = cl_3$  koşulunu sağlayan  $S$  noktasının ağırlık merkezi olduğunu gösterelim:

$$|BA_1| : |A_1C| = Alan(BA_1A) : Alan(A_1CA) = Alan(ASB) : Alan(ASC) = cl_3 : bl_2 = 1,$$

yani  $\overline{AA_1}$  kenarortaydır. Benzer şekilde  $S$  nin diğer iki açıortayın da üzerinde olduğu gösterilebilir. Yani  $S$  noktası ağırlık merkezidir.

76.  $|AB| = |BC|$  ve  $|CD| = |DA|$  olan  $ABCD$  dörtgeninin  $AC$  ve  $BD$  köşegenlerinin kesiştiği nokta  $O$  noktası olsun. Ayrıca,  $ABD$  üçgeninin  $D$  köşesinden inen yüksekliğin ayağına  $N$ ,  $BCD$  üçgeninin  $B$  köşesinden inen yüksekliğin ayağına  $K$  noktası diyelim. Bu durumda  $N$ ,  $O$  ve  $K$  noktalarının bir doğru üzerinde olduğunu gösteriniz.

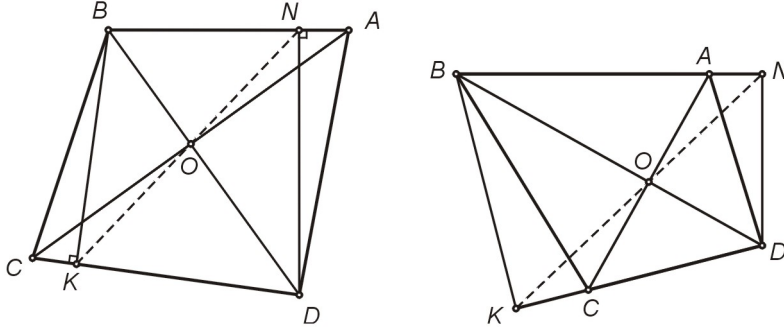
**Çözüm.**  $ABCD$  dörtgeni bir deltoid olduğundan,  $AC$  ve  $BD$  köşegenleri birbirine diktir. Dolayısıyla (aşağıdaki şekillerden soldakinde görülebileceği gibi)  $m(\widehat{AOD}) = 90^\circ = m(\widehat{AND})$  olur. Yani  $A$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $D$  noktaları bir çember üzerinde olur ve

buradan da

$$m(\widehat{NOA}) = m(\widehat{NDA}) = 90^\circ - m(\widehat{DAN})$$

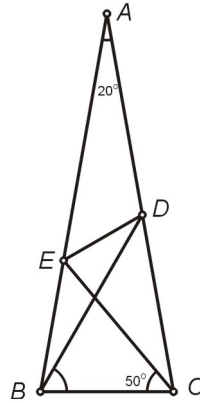
olduğu görülür.

Benzer şekilde  $m(\widehat{COK}) = 90^\circ - m(\widehat{BCK})$  olduğu da açıktır ve  $ABCD$  deltoid olduğundan  $m(\widehat{DAN}) = m(\widehat{BCK})$ , ve dolayısıyla  $m(\widehat{NOA}) = m(\widehat{KOC})$  olur. Bu açıların eşit olması, bu açıların ters açılar olduğunu yani  $N, O, K$  noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu gösterir.

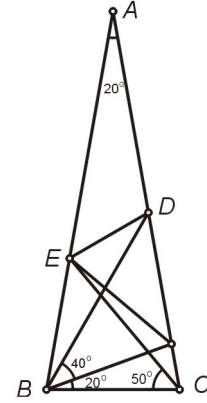


Benzer bir argümanla sağdaki şekilde verilen durum da ele alınabilir.

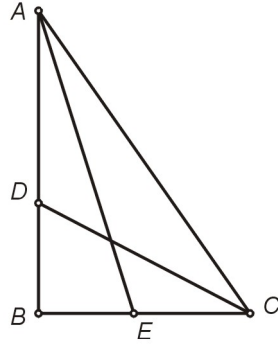
77.  $ABC$  ikizkenar ( $|AB| = |AC|$ ) üçgeninde  $m(\widehat{BAC}) = 20^\circ$  dir .  $D$  noktası  $AC$  kenarının üzerinde,  $E$  noktası  $AB$  kenarının üzerinde,  $m(\widehat{DBC}) = 60^\circ$  ve  $m(\widehat{ECB}) = 50^\circ$  olduğuna göre  $m(\widehat{EDB})$  yi bulunuz.



**Çözüm.**  $m(\widehat{KBC}) = 20^\circ$  olmak üzere  $AC$  üzerinde bir  $K$  noktası alalım.  $E$  ile  $D$  yi ve  $K$  ile  $B$  yi birleştirelim.  $m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{ECB})$  olduğu için  $BEC$  üçgeni,  $BE$  ve  $BC$  kenarlarının uzunlukları eşit olan bir ikizkenar üçgendir.  $m(\widehat{BKC}) = m(\widehat{BCK})$  olduğu için  $BKC$  üçgeni,  $BK$  ve  $BC$  kenarlarının uzunlukları eşit olan bir ikizkenar üçgendir. Buradan  $|BE| = |BK|$  elde edilir.  $|BE| = |BK|$  ve  $m(\widehat{EBK}) = 60^\circ$  olmasından dolayı  $EBK$  üçgeni eşkenar üçgendir.  $m(\widehat{BDK}) = m(\widehat{DBK}) = 40^\circ$  olduğu için  $BDK$  üçgeni,  $DK$  ve  $BK$  kenarların uzunlukları eşit olan bir ikizkenar üçgendir.  $|KE| = |KD|$  olduğu için  $KDE$  ikizkenar üçgendir.  $m(\widehat{EKD}) = 40^\circ$  olduğu açıktır. Buradan  $m(\widehat{EDK}) = 70^\circ$  ve dolayısıyla  $m(\widehat{EDB}) = 30^\circ$  bulunur.



78.  $AC$  kenarı,  $ABC$  dik üçgeninin hipotenüsüdür.  $D$  noktası  $AB$  kenarının ve  $E$  noktası da  $BC$  kenarının üzerindedir.  $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DCA})$  ve  $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EAC})$  dir.  $AE$  kenarının uzunluğu 9 ve  $CD$  kenarının uzunluğu  $8\sqrt{2}$  olduğuna göre  $AC$  kenarının uzunluğunu bulunuz.



**Çözüm.**  $m(\widehat{BAE}) = x$  ve  $m(\widehat{BCD}) = y$  olsun. Buradan:

$$|AB| = 9 \cos(x) = |AC| \cdot \cos(2x) \text{ ve}$$

$$|BE| = 8\sqrt{2} \cos(y) = |AC| \cdot \cos(2y)$$

denklemleri elde edilir.  $|AC|$  iki denklemden de çekip eşitlersek

$$\frac{9 \cos(x)}{\cos(2x)} = \frac{8\sqrt{2} \cos(y)}{\cos(2y)} \quad (13)$$

bulunur.

$y = 45^\circ - x$  ve bundan dolayı  $2y = 90^\circ - 2x$  olduğu için  $\cos(2y) = \sin(2x)$  olduğu

görülür. Bunu (13) de yerine koyarsak

$$\frac{9 \cos(x)}{\cos(2x)} = \frac{8\sqrt{2} \cos(45^\circ - x)}{\sin(2x)} \quad (14)$$

buluruz.  $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$  eşitsizliğini kullanarak

$$\cos(45^\circ - x) = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\sqrt{2}} \quad (15)$$

elde ederiz. (14) nin terimlerini düzenlediğimizde

$$\tan(2x) = \frac{8(\cos(x) + \sin(x))}{9 \cos(x)} \quad (16)$$

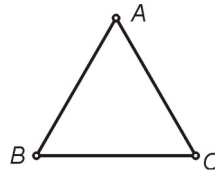
olduğunu görürüz.  $\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$  özdeşliğini kullanıp,  $t = \tan(x)$  dersek  $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{8(1+t)}{9}$  elde ederiz. Buradan  $\frac{9t}{4} = (1+t)(1-t^2) = 1+t-t^2-t^3$  ve dolayısıyla

$$t^3 + t^2 + \frac{5}{4}t - 1 = 0 \quad (17)$$

buluruz. Bu denklemin köklerinden biri  $\frac{1}{2}$  dir. Bu bilgiyi kullanarak (17) denklemindeki polinomu  $t^3 + t^2 + \frac{5}{4}t - 1 = (t - \frac{1}{2})(t^2 + 3\frac{t}{2} + 2) = 0$  şeklinde çarpanlarına ayırırız. Diskriminant hesabıyla, ikinci derece çarpanın gerçel köklerinin olmadığı kolayca görülür. Dolayısıyla (17) denkleminin tek gerçel kökü  $\frac{1}{2}$  dir. Trigonometrik özdeşlikler kullanılarak  $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$  ve  $\cos(2x) = \frac{(1-t^2)}{1+t^2}$  bulunur.  $|AC| = \frac{9 \cos(x)}{\cos(2x)}$  olduğu için,  $|AC| = \frac{9\sqrt{1+t^2}}{1-t^2}$  elde ederiz. Buradan  $|AC| = \frac{9\sqrt{5}/2}{3/4} = 6\sqrt{5}$  bulunur.

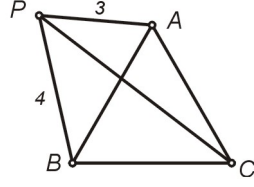
79.  $A, B$  ve  $C$  birbirlerine olan uzaklıkları eşit olan ( $|AB| = |AC| = |BC|$ ) üç şehirdir.  $A$  şehrinden 3 km,  $B$  şehrinden 4 km uzakta olan bir aracın  $C$  şehrine olan uzaklığı en çok kaç kilometre olabilir?

**Çözüm.**  $A, B$  ve  $C$  şehirlerinin birbirlerine olan uzaklıkları eşit olduğu için bu üç şehir bir eşkenar üçgen oluşturur.



Arabanın bulunduğu noktaya  $P$  dersek,  $P$  noktasının  $C$  ye olabilecek en uzak mesade olması için,  $C$  ve  $P$  nin  $|AB|$  doğru parçasının farklı taraflarında olması gerekir.

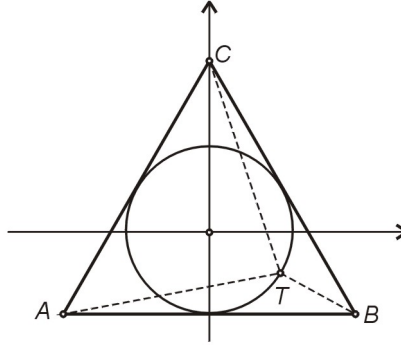




Ptolemy eşitsizliğinden<sup>2</sup>  $AB \cdot CP \leq AP \cdot BC + BP \cdot CA$  yazılabilir.  $AB = BC = CA$  olduğundan  $CP \leq AP + BP$  elde edilir.  $|AP| = 3$  ve  $|BP| = 4$  yerine koyulursa  $CP \leq 7$  olur. Dolayısıyla, Aracın  $C$  şehrine olabilecek en uzak mesafesi 7 km dir.

80. Bir Kenarı 6 olan eşkenar üçgenin içine çizilen çember üzerindeki herhangi bir  $T$  noktası için  $|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = 45$  olduğunu gösteriniz.

### Çözüm



Çemberin merkezine şekildeki gibi bir koordinat eksenini yerleştirelim. Üçgenin yüksekliği  $6 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$  dür. Çemberin merkezi ağırlık merkezinde olduğu için yarıçapı  $r = \sqrt{3}$  dür. Bu nedenle köşe noktaları  $A(-3, -\sqrt{3})$ ,  $B(3, -\sqrt{3})$ ,  $C(0, 2\sqrt{3})$  dür. Çemberin üzerindeki herhangi bir nokta  $T(x, y)$  olsun. Çember denkleminde dolayı  $x^2 + y^2 = 3$  tür. İki noktanın uzaklık formülünden:

$$\begin{aligned} |TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 &= (x+3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 + x^2 + (y-2\sqrt{3})^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 + x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}y + 12 \\ &= 3(x^2 + y^2) + 36 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Ptolemy (Batlamyus) Eşitsizliği: Bir  $ABCD$  dörtgeni için,  $AB, BC, CD$  ve  $DA$  kenarlar,  $AC$  ve  $BD$  köşegenler olmak üzere,

$$AB \cdot CP \leq AP \cdot BC + BP \cdot CA$$

olur. Eşitlik durumu sadece  $A, B, C$  ve  $D$  çembersel olduğunda geçerlidir.

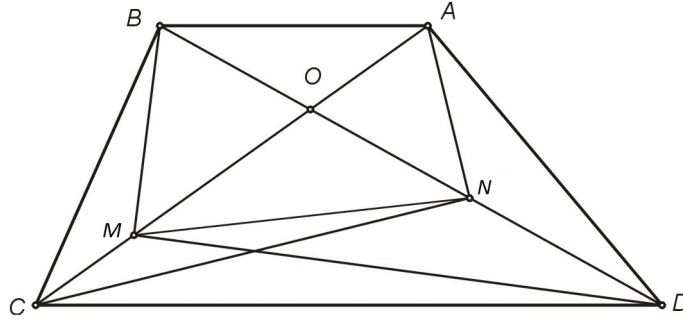
$$= 9 + 36 = 45.$$

81.  $ABCD$  yamuğunda köşegenler  $O$  noktasında dik olarak kesişmektedir.  $M$  ve  $N$ , sırasıyla  $OC$  ve  $OD$  doğru parçaları üzerinde  $m(\widehat{ANC}) = m(\widehat{BMD}) = 90^\circ$  olacak şekilde noktalar.  $E$ ,  $MN$  doğru parçasının orta noktası ise

- (a)  $OMN$  ve  $OBA$  üçgenlerinin benzer üçgenler olduklarını  
(b)  $OE$  doğru parçasının  $AB$  'ye dik olduğunu

gösteriniz.

**Çözüm:**



- (a)  $ANC$  ve  $BMD$  dik üçgenlerinde, dik üçgende yükseklik bağıntısı kullanarak

$$|ON|^2 = |AO| \cdot |OC|$$

ve

$$|OM|^2 = |OB| \cdot |DO|$$

elde edilir.  $AOB$  ve  $COD$  üçgenleri benzer üçgenlerdir. O halde

$$\begin{aligned} \frac{|OA|}{|OC|} &= \frac{|OB|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|DC|} \\ \frac{|ON|^2}{|OA|^2} &= \frac{|OA| \cdot |OC|}{|OA|^2} = \frac{|DC|}{|AB|} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\frac{|OM|^2}{|OB|^2} = \frac{|DC|}{|AB|}$$

bulunur. Ayrıca  $OMN$  ve  $OBA$  üçgenlerinde  $\widehat{MOP}$  ortaktır. Dolayısıyla bu üçgenler benzerdir.

- (b) İlk şıktan  $OMN$  ve  $OBA$  üçgenlerinin benzer olduğu elde edilmişti. O halde  $m(\widehat{OMN}) = m(\widehat{OBA})$  dır.  
 $OE$ ,  $OMN$  üçgeninde hipotenüse ait kenarortay olduğunda  $|OE| = |EM|$  olur.  
 Buradan  $m(\widehat{EOM}) = m(\widehat{EMO}) = m(\widehat{OBA})$  bulunur.  $m(\widehat{MOE}) + m(\widehat{NOE}) = 90^\circ$  olduğundan  $m(\widehat{OBA}) + m(\widehat{NOE}) = 90^\circ$  ve  $OE \perp AB$  bulunur.

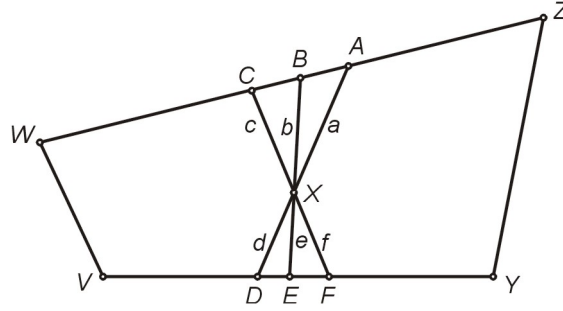
82.  $G$  kapalı dörtgeni için

- (a) Eğer üzerinden geçen her doğrunun  $G$  'yi eşit iki alana ayırdığı bir  $X$  noktası varsa  $G$  bir paralelkenardır.  
 (b) Eğer  $G$  bir paralelkenarsa, üzerinden geçen her doğrunun  $G$  'yi eşit iki alana ayırdığı bir  $X$  noktası vardır.

önergelerini ispatlayınız.

**Çözüm:**

- (a)  $G$  dörtgeninin köşeleri  $WVYZ$  olsun.  $X$ , dörtgenin dışında olduğu zaman köşelere çizilecek paralel doğrulardan en az bir tanesi dörtgeni kesmeyeceğinden,  $X$  'in üzerinden geçen her doğrunun  $G$  'yi eşit iki alana bölebilmesi için  $X$  'in  $G$  'nin içinde olması gerekir.  $G$  ve  $X$  şekildeki gibi olsun  $X$  'in özelliğinden dolayı



$ADVW$  ve  $ADYZ$  nin alanları eşittir.  $BEVW$  ve  $BEYZ$  nin alanları da eşittir. Bu alanların hepsi  $G$  nin alanının yarısına eşittir.  $ADWV$  ve  $BEVW$  nun ortak alanlarını çıkardıktan sonra kalan  $BXA$  ve  $DXE$  üçgenlerinin alanlarının eşit olması gerekir. Yani

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\widehat{BXA}) = \frac{1}{2} \cdot d \cdot e \cdot \sin(\widehat{DXE})$$

eşitliği vardır.  $BXA$  ve  $DXE$  açıları eşit olduğu için

$$a \cdot b = d \cdot e$$

elde edilir.

Benzer şekilde  $BEVW$  ve  $WCFV$  dörtgenlerinin alanlarını kullanarak  $b \cdot c = e \cdot f$  ve  $WCFV$  ve  $ADYZ$  dörtgenlerinin alanlarını kullanarak da  $a \cdot c = d \cdot f$  eşitlikleri elde edilebilir.

İlk iki eşitliği çarptığımızda

$$a \cdot b^2 \cdot c = d \cdot e^2 \cdot f$$

bulunur. Son eşitliği kullanarak  $b^2 = e^2$  elde edilir.  $b$  ve  $e$  sıfırdan büyük tamsayılar olduğu için bu da  $b = e$  olduğunu gösterir. Diğer eşitlikler de uygun şekilde çarpıldığında  $a = d$  ve  $c = f$  elde edilebilir.

O halde  $AXB$  ve  $DXE$  üçgenlerinde kenar-açı-kenar benzerliği vardır. Bu da  $m(\widehat{XAB}) = m(\widehat{XDE})$  anlamına gelir. Yani  $WZ$  ve  $VY$  birbirlerine paralel doğrulardır.

Aynı şekilde  $WV$  ve  $ZY$  doğrularını kesen ve  $X$  'den geçen 3 doğru alındığında  $WV$  ile  $ZY$  'nin birbirine paralel olduğu gösterilebilir.

Dolayısıyla  $WVYZ$  bir paralelkenardır.

- (b)  $G$ , köşeleri  $ABCD$  olan bir paralelkenar olsun. Köşegenlerin kesişim noktasını  $F$  olarak alalım. Şimdi  $F$  'den geçen her doğrunun  $G$  'yi eşit iki alana ayırdığını gösterelim.

$F$  'den geçen ve  $BC$  doğru parçasını  $E$ ,  $AD$  doğru parçasını da  $H$  noktasında kestiğini düşünelim. Paralelkenarda köşegenlerin kesim noktası aynı zamanda köşegenlerin orta noktası olduğundan  $|AF| = |FC|$  ve  $|FD| = |FB|$  'dir. Aynı zamanda  $AB$  ve  $DC$  de eşit uzunluktadır. Dolayısıyla  $AFB$  ve  $DFC$  üçgenleri eş üçgenlerdir ve alanları da eşittir.

$AD$  ve  $BC$  paralel oldukları için  $m(\widehat{AHF}) = m(\widehat{FEC})$  ve  $m(\widehat{FAH}) = m(\widehat{ECF})$ .

Ayrıca iç-ters-açılar oldukları için  $m(\widehat{HFA}) = m(\widehat{EFC})$ .  $AHF$  ve  $CFE$  üçgenlerinde  $|FA| = |FC|$  olduğundan ve bütün açıları eşit olduğundan bu üçgenler eş üçgenlerdir ve alanları aynıdır.

$F$ ,  $G$  'nin yüksekliğini de iki eş parçaya ayırdığı için ve taban uzunlukları aynı olduğu için,  $AFD$  ve  $BFC$  üçgenlerinin alanları aynıdır. Daha önce  $AHF$  ve  $EFC$  üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu bulmuştuk dolayısıyla  $BEF$  ve  $HFD$  üçgenlerinin de alanları eşittir.

O halde  $EH$  doğru parçası,  $G$  'yi  $CB$ ,  $BE$  ve  $AD$  doğrularına göre eşit iki alana ayırmıştır. Bu  $F$  'den geçen her doğru için kolayca genelleştirilebileceğinden  $F$  'den geçen her doğru  $G$  'yi eşit iki alana ayırır.

83.  $ABC$  dik üçgeninde  $|AB| = |AC|$ .  $[AB]$  üzerinde  $|AM| = |BP|$  olacak şekilde  $M$  ve  $P$  noktaları alalım.  $D$  noktası da  $[BC]$  nin orta noktası olmak üzere,  $[CM]$  ve

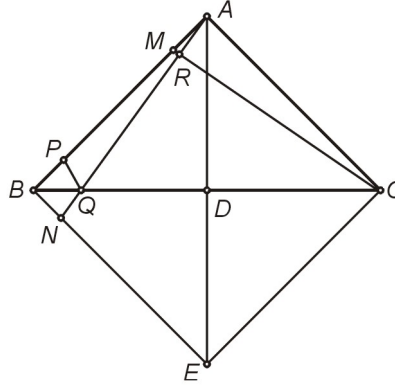
$[BC]$  üzerinde sırasıyla  $R$  ve  $Q$  noktaları,  $A, R, Q$  doğrusal ve  $AQ$  ile  $CM$  dik olacak şekilde alınmıştır.

a-)  $m(\widehat{AQC}) = m(\widehat{PQB})$

b-)  $m(\widehat{DRQ}) = 45^\circ$

olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm.** Genelliği bozmadan noktaların  $A, M, P, B$  şeklinde sıralandığını kabul edebiliriz.  $ABEC$  dörtgeninin merkezi  $D$  olan kare olacak şekilde  $E$  noktası işaretleyelim.  $N$  noktası da  $AQ$  ve  $EB$  doğrularının kesişim noktası olsun.



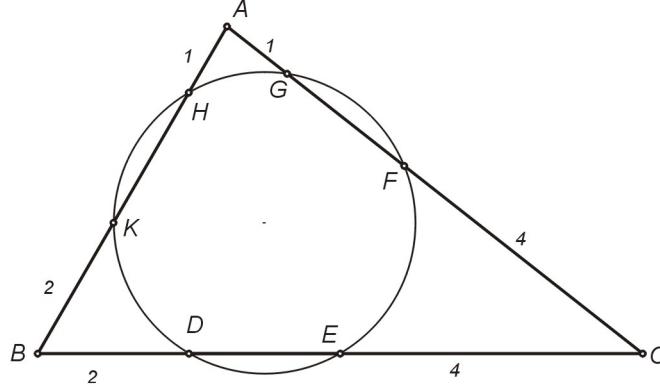
a-)  $m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{BAN})$  ve  $m(\widehat{ABN}) = m(\widehat{CAM}) = 90^\circ$  olduklarına göre  $AMC$  ve  $BNA$  benzer üçgenlerdir. Ayrıca  $|AC| = |BA|$  olduğuna göre bu üçgenler eş üçgenlerdir. Buradan  $|AM| = |BN|$  eşitliğini elde ederiz. Bunu soruda verilen  $|AM| = |BP|$  ile birleştirirsek  $|BN| = |PB|$  çıkar.  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CBE})$  ve  $QB$  ortak kenar olduğuna göre  $PQB$  ile  $NQB$  eş üçgenlerdir. Buradan  $m(\widehat{PQB}) = m(\widehat{NQB})$  elde ederiz ve  $m(\widehat{CQA}) = m(\widehat{NQB})$  olduğuna göre  $m(\widehat{AQC}) = m(\widehat{PQB})$  çıkar.

b-)  $AD$  ikizkenar üçgende açıortay olduğundan  $m(\widehat{ADQ}) = 90^\circ$ 'dir.  $m(\widehat{ADQ}) = m(\widehat{QRC})$  ve  $m(\widehat{AQC}) = m(\widehat{RQC})$  olduğuna göre  $ADQ$  ve  $RCQ$  benzer üçgenlerdir. Buradan  $\frac{|DQ|}{|RQ|} = \frac{|AQ|}{|CQ|}$  elde ederiz.  $m(\widehat{CQA})$ ,  $DRQ$  ve  $ACQ$  üçgenlerinde ortak açı olduğuna göre yukarıdaki eşitlikten iki üçgenin benzer olduğunu çıkarırız. Dolayısıyla  $m(\widehat{DRQ}) = m(\widehat{ACQ}) = 45^\circ$  elde ederiz.

84.  $ABC$  üçgeninin  $BC$  kenarının üzerindeki  $D$  ve  $E$  noktaları, ( $D$ ,  $B$ 'ye daha yakın);  $AC$  kenarının üzerindeki  $F$  ve  $G$  noktaları, ( $F$ ,  $C$ 'ye daha yakın);  $AB$  kenarının üzerindeki  $H$  ve  $K$  noktaları, ( $H$ ,  $A$ 'ya daha yakın) verilmiştir.  $|AH| = |AG| = 1$ ,

$|BK| = |BD| = 2$ ,  $|CE| = |CF| = 4$ ,  $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$  olup  $D, E, F, G, H, K$  noktaları bir çember üzerindedir. Buna göre  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberinin yarı çapını bulunuz.

**Çözüm.**



$|AH| = |AG|$ ,  $|BK| = |BD|$  ve  $|CE| = |CF|$  olduğundan, kiriş teoremini  $D, E, F, G, H, K$  noktalarından geçen çembere uyguladığımızda  $|ED| = |FG| = |HK|$  elde ederiz. Bu uzunluğa  $x$  diyelim. Bu durumda  $ABC$  üçgeninin kenar uzunlukları  $x+3$ ,  $x+5$  ve  $x+6$  olur.  $ABC$  açısının  $60^\circ$  olduğunu ve kosinüs teoremini kullanarak  $x = 2$  elde ederiz. Son olarak, kenar uzunlukları 5, 7 ve 8 olan bir üçgenin iç teğet çemberinin yarı çapını bulmak için,  $ur = Alan(ABC)$  formülünü kullanarak

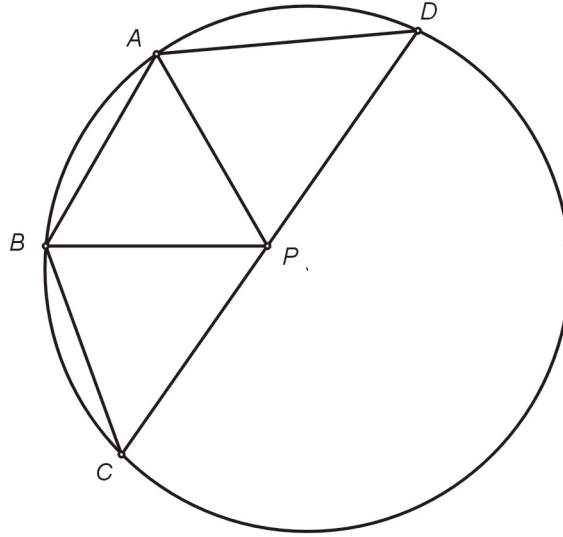
$$\frac{5+7+8}{2} \cdot r = \frac{5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ}{2}$$

elde ederiz ve buradan da  $r = \sqrt{3}$  buluruz.

85. Köşeleri  $r$  yarıçaplı bir çemberin üzerinde olan tüm  $ABCD$  dörtgenlerini ve  $|CB| = |BP| = |PA| = |AB|$  olacak şekilde  $[CD]$  kenarı üzerinde bir  $P$  noktası düşünelim.
- a) Yukarıdaki koşulu sağlayan  $A, B, C, D, P$  noktalarının varlığını gösteriniz.
- b) Yukarıdaki koşulu sağlayan tüm  $A, B, C, D, P$  noktaları için  $|DA| = |DP| = r$  olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.**

- a)  $|AB| < r\sqrt{3}$  olacak şekilde bir  $AB$  kirişi ve  $ABP$  eşkenar üçgen olacak şekilde çemberin içinde bir  $P$  noktası alalım.  $C$  noktası çemberin üzerinde,  $|BP| = |BC|$  ve  $[AC] \cap [BP] \neq \emptyset$  olacak şekilde seçilsin.  $P$  ve  $C$  noktalarından geçen doğrunun çemberi kestiği noktaya  $D$  diyelim. Bu şekilde seçilen  $A, B, C, D, P$  noktaları istenen koşulu sağlamaktadır.



b  $m(\widehat{BPC}) = m(\widehat{BCP}) = x$  olsun.  $BPC$  ikizkenar üçgeninde  $m(\widehat{PBC}) = 180^\circ - 2x$  olur.  $ABCD$  kirişler dörtgeni ve  $m(\widehat{BCD}) = x$  olduğu için  $m(\widehat{DAB}) = 180^\circ - x$ , dolayısıyla  $m(\widehat{DAP}) = 120^\circ - x$  dir.  $m(\widehat{ABC}) = 240^\circ - 2x$  olduğundan  $m(\widehat{ADC}) = 2x - 60^\circ$  olur.  $DAP$  üçgeninde  $m(\widehat{APD}) = 120^\circ - x$ , ve  $|DA| = |DP|$  bulunur.

$ABD$  ve  $PBD$  üçgenleri eş üçgenlerdir. Buradan  $m(\widehat{ABD}) = 30^\circ$  ve  $|AD| = r$  elde edilir.

86.  $ABC$  üçgeni,  $A$  noktasında dik açıdır.  $D$  noktası,  $CD = 1$  olacak şekilde  $AB$  kenarının üzerindedir.  $AE$ ,  $A$  noktasından  $BC$  kenarına olan dik yüksekliktir.  $BD = BE = 1$  ise,  $AD$  kenarının uzunluğu nedir?

**Çözüm:** Bu sorunun çözümüne bir kaç yaklaşımda bulunmak mümkündür. Aşağıda, iki yoldan çözüm yapılacaktır. Birinci çözüm, uzun olmasına rağmen diğerine göre daha basittir.

**Geometrik Çözüm:**

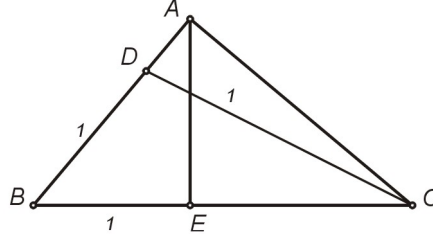
$AD = x$ ,  $CE = y$  ve  $m(\widehat{ABC}) = t$  olsun.  $AE$  ve  $CD$ ,  $F$  noktasında kesişsinler.

$\triangle BCD$  ikizkenar olduğu için,  $m(\widehat{BCD}) = t$  'dir.

Bu yüzden,  $m(\widehat{CFE}) = 90^\circ - t$  ve bu yüzden de  $m(\widehat{DFA}) = 90^\circ - t$  'dir.

Ayrıca,  $m(\widehat{FAD}) = m(\widehat{EAB}) = 90^\circ - t$  olduğundan dolayı,  $\triangle DFA$  ikizkenar ve bu yüzden  $DF = AD = x$  dir.

Dolayısıyla,  $CF = 1 - x$  olur.



$ABE$  ve  $CFE$  üçgenlerinin her ikisi de birer dik açı içerdikleri ve  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ECF})$  olduğu için, bu iki üçgen benzerdir.

Bu yüzden,  $y/(1-x) = 1/(1+x)$  ve dolayısıyla

$$y = (1-x)/(1+x) \quad (1)$$

denklemini elde edilir.

$ABC$  ve  $ABE$  üçgenlerinin her ikisi de birer dik açı içerdikleri ve  $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ABE})$  olduğu için, bu iki üçgen benzerdir.

Bu yüzden,  $(1+x)/(1+y) = 1/(1+x)$  ve dolayısıyla

$$(1+x)^2 = 1+y \quad (2)$$

denklemini elde edilir.

(1) deki  $y$  değerini (2) de yerine koyarsak,  $(1+x)^2 = 1 + (1-x)/(1+x) = 2/(1+x)$  ve buradan da  $(1+x)^3 = 2$  olduğu görülür.

Bu yüzden,  $AD$  'nin uzunluğu  $\sqrt[3]{2} - 1$  bulunur.

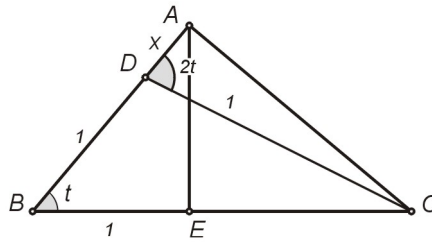
### Trigonometrik Çözüm:

$AD = x$  ve  $m(\widehat{ABC}) = t$  olsun.

$\triangle BCD$  ikizkenar olduğu için,  $m(\widehat{BCD}) = t$  'dir.

Ayrıca,  $m(\widehat{BCA}) = 90^\circ - t$  ve bu yüzden  $m(\widehat{DCA}) = 90^\circ - 2t$  'dir.

Dolayısıyla,  $m(\widehat{ADC}) = 2t$  bulunur.





$ABE$  ve  $ADC$  üçgenlerini dikkate alırsak, sırasıyla

$$\begin{aligned}\cos t &= 1/(1+x) \\ \cos 2t &= x\end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz.

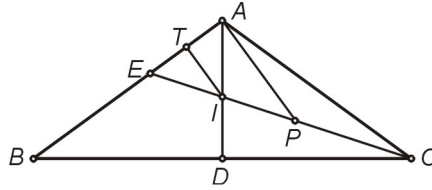
$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$  formülünü kullanarak,  $x = 2/(1+x)^2 - 1$  eşitliğini elde ederiz.

Bu nedenle,  $(1+x) = 2/(1+x)^2$  ve dolayısıyla  $(1+x)^3 = 2$  olur.

Bu yüzden,  $AD$  'nin uzunluğu  $\sqrt[3]{2} - 1$  bulunur.

87.  $|AB| = |AC|$  olacak şekilde bir  $ABC$  üçgeninde  $D$ ,  $A$  köşesinden inilen dikmenin ayağıdır.  $E$  noktası ise  $AB$  kenarı üzerinden bir nokta,  $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ECB}) = 18^\circ$  ve  $|AD| = 3$  ise  $|CE| = ?$

**Çözüm:**  $AD$  ve  $CE$  açıortaylarının kesiştiği noktaya  $I$  diyelim.  $I$ ,  $ABC$  üçgeninin içteğet çemberinin merkezi olacaktır. O halde  $I$ ,  $BA$  ve  $BC$  kenarlarına eşit uzaklıktadır.  $T$ ,  $I$  noktasının  $AB$  kenarına izdüşümü olmak üzere  $|ID| = |IT|$  'dir.  $CE$  doğrusu üzerinde  $AP \perp AB$  olacak şekilde bir  $P$  noktası alalım.



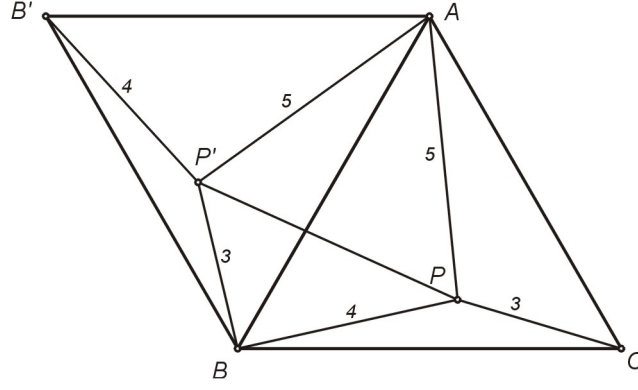
$m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ACB}) = 18^\circ$  olduğundan  $m(\widehat{ACD}) = 36^\circ$  ve  $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{IEA}) = 54^\circ$  olur. Buradan  $AEI$  üçgeni  $|AI| = |EI|$  olacak şekilde ikizkenar üçgen olur. Ayrıca  $m(\widehat{IAP}) = 90^\circ - m(\widehat{EIA}) = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$  ve  $m(\widehat{EPA}) = 90^\circ - m(\widehat{AEP}) = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$  olduğundan  $|AI| = |IP|$  'dir.  $T$ ,  $AE$  kenarına dik,  $EIA$  üçgeni ikizkenar ve  $|EI| = |AI| = |IP|$  olduğu için  $T$ ,  $EA$ ,  $I$  da  $EP$  kenarlarının orta noktasıdır. O halde  $|IT| = \frac{1}{2}|AP|$  'dir.  $m(\widehat{PAC}) = m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{EAP}) = 2 \cdot 54^\circ - 90^\circ = 18^\circ = m(\widehat{ACP})$  eşitliğinden  $|AP| = |PC| = 2|IT| = 2|ID|$  elde edilir. Buradan da

$$|CE| = |EI| + |IP| + |PC| = |AI| + |AI| + 2|ID| = 2(|AI| + |ID|) = 2|AD| = 2 \cdot 3 = 6$$

bulunur.

88. Eşkenar üçgenin içindeki bir noktanın köşelere uzaklıkları 3, 4 ve 5 ise üçgenin alanını bulunuz.

**Çözüm.** Bir  $ABC$  üçgeni ve  $|PA| = 5$ ,  $|PB| = 4$  ve  $|PC| = 3$  olan bir  $P$  noktası alınsın. Üçgeni  $A$  noktası etrafında  $60^\circ$  şeklindeki gibi döndürülsün.



$|P'B| = |PC| = 3$ ,  $|P'B'| = |PB| = 4$  ve  $|P'A| = |PA| = 5$  tir.  $APP'$  eşkenar üçgen olduğu için  $|PP'| = 5$  tir.  $|PB|^2 + |P'B|^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 = |PP'|^2$  yani  $m(\widehat{PBP'}) = 90^\circ$  dir.  $APB$  ve  $BP'B'$  üçgenlerinden  $m(\widehat{ABP}) + m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{ABP}) + m(\widehat{B'BP'}) = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$  ve  $m(\widehat{APB}) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$  dir.  $APB$  üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2 - 2 \cdot |AP| \cdot |BP| \cdot \cos(m(\widehat{APB})) = 25 + 12\sqrt{3}$$

ve alan

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |AB|^2 = \frac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$$

bulunur.

89. Kenar uzunlukları ve içteğet çemberinin çapı aritmetik dizi oluşturan üçgenin diküçgen olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm.** İçteğet çemberin merkezinden üçgenin kenarlarına paralel çizilen doğrular yardımıyla içteğet çemberin çapının, üçgenin kenarlarından daha küçük olduğu kolaylıkla görülebilir.  $x$  içteğet çemberin çapı ve  $d > 0$  aritmetik dizinin farkı ise üçgenin kenarları  $x + d, x + 2d, x + 3d$  dir. Üçgenin alanı  $S$  iki farklı yolla hesaplanabilir. Üçgenin çevresinin yarısı  $p$  olmak üzere,

$$p \cdot \frac{x}{2} = S = \sqrt{p \cdot (p - (x + d)) \cdot (p - (x + 2d)) \cdot (p - (x + 3d))}.$$

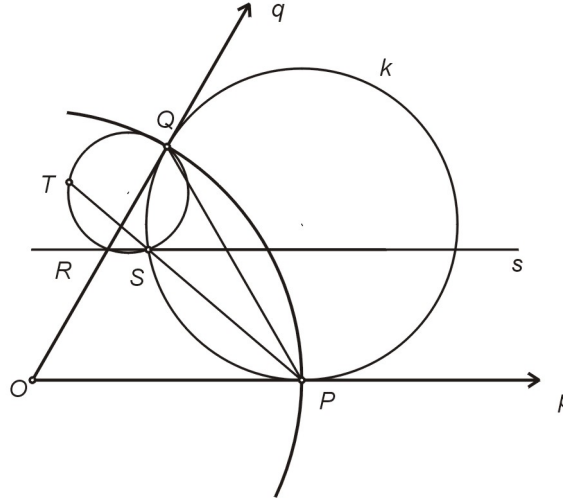
Denklemden  $p = \frac{3(x+2d)}{2}$  yerine yazılırsa,

$$\frac{3(x+2d)x}{4} = \sqrt{\frac{3(x+2d)(x+4d)(x+2d)x}{16}}.$$

Dolayısıyla  $3x = x + 4d$  yani  $x = 2d$ . Üçgenin kenarları  $x + d = 3d, x + 2d = 4d$  ve  $x + 3d = 5d$  bulunur. Sonuç olarak üçgen diküçgendir.

90.  $\widehat{pOq}$  açısı içinde yer alan  $S$  noktası,  $Op$  doğrusuna  $P$  noktasında,  $Oq$  doğrusuna ise  $Q$  noktasında teğet olan bir  $k$  çemberinin üzerinde bulunmaktadır.  $Op$  doğrusuna paralel olan ve  $S$  noktasından geçen  $s$  doğrusu ise  $Oq$  doğrusunu  $R$  noktasında kesmektedir.  $T$  noktası ise  $SQR$  üçgeninin çevrel çemberi ile  $PS$  doğrusunun kesiştiği noktadır ( $T \neq S$ ). Bu durumda  $OT \parallel SQ$  olduğunu ve  $OT$  doğrusunun  $SQR$  üçgeninin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $m(\widehat{OPS}) = \varphi_1$  ve  $m(\widehat{OQS}) = \varphi_2$  olsun. Bu durumda  $m(\widehat{OPS}) = m(\widehat{PQS}) = \varphi_1$  ve  $m(\widehat{OQS}) = m(\widehat{QPS}) = \varphi_2$  olduğunu biliyoruz ( $k$  çemberinin teğetleri).



Şimdi  $RS \parallel OP$  olduğu için  $m(\widehat{OPS}) = m(\widehat{RST}) = \varphi_1$  olur ve  $RSQT$  bir kirişler dörtgeni olduğu için  $m(\widehat{RQT}) = m(\widehat{RST}) = \varphi_1$  olur.

Dolayısıyla  $m(\widehat{OPT}) = \varphi_1 = m(\widehat{RQT}) = m(\widehat{OQT})$  olduğundan  $OPQT$  dörtgeni bir kirişler dörtgenidir. Buradan  $m(\widehat{QOT}) = m(\widehat{QPT}) = \varphi_2 = m(\widehat{OQS})$  olduğu yani  $OT \parallel SQ$  olduğu görülür. Burada  $OPQT$  kirişler dörtgeni olduğundan

$$m(\widehat{OTR}) = m(\widehat{OTP}) - m(\widehat{RTS}) = m(\widehat{OQP}) - m(\widehat{RQS}) = (\varphi_1 + \varphi_2) - \varphi_2 = \varphi_1 = m(\widehat{RQT})$$

olduğu görülür. Dolayısıyla  $OT$  doğrusu  $SQR$  üçgeninin çevrel çemberine teğettir.

91.  $ABCD$  dört yüzlünün ağırlık merkezi ile  $A$  ve  $B$  köşeleri arasındaki uzaklık eşit olduğuna göre

$$|AC|^2 + |AD|^2 = |BC|^2 + |BD|^2$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ve  $D$  noktalarının vektörleri sırasıyla  $\vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_B$ ,  $\vec{r}_C$  ve  $\vec{r}_D$ ; dört

yüzlünün ağırlık merkezi  $T$  noktası olsun. Burada verilen durum

$$\vec{AT}^2 = \vec{BT}^2$$

olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla bu denklem vektörel olarak ifade edildiğinde

$$(\vec{r}_T - \vec{r}_A)^2 = (\vec{r}_T - \vec{r}_B)^2$$

ve bunun sonucunda

$$\vec{r}_A^2 - \vec{r}_B^2 - 2\vec{r}_A \cdot \vec{r}_T + 2\vec{r}_B \cdot \vec{r}_T = 0$$

elde edilir. Son denklemde  $\vec{r}_T = \frac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D)$  değişimi uygulandığında

$$\vec{r}_A^2 - \vec{r}_B^2 - \vec{r}_A \cdot \vec{r}_C + \vec{r}_B \cdot \vec{r}_C - \vec{r}_A \cdot \vec{r}_D + \vec{r}_B \cdot \vec{r}_D = 0$$

eşitliği elde edilir.

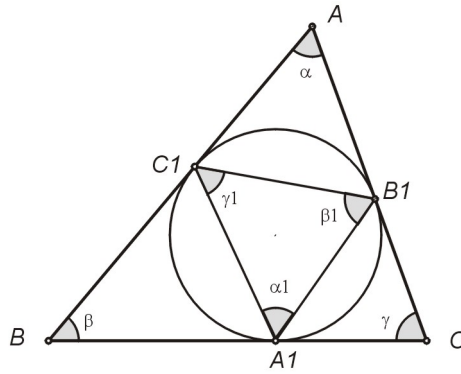
Öte yandan soruda istenen eşitlik

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_A)^2 + (\vec{r}_D - \vec{r}_A)^2 - (\vec{r}_C - \vec{r}_B)^2 - (\vec{r}_D - \vec{r}_B)^2 = 0$$

olarak ifade edilebilir. Burada bulduğumuz bir önceki denklemin bu denkleme eşit olduğu kolayca görülebilir.

92.  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberi  $BC$ ,  $CA$  ve  $AB$  kenarlarına sırasıyla  $A_1$ ,  $B_1$  ve  $C_1$  noktalarında değiyor. Bu durumda  $A_1B_1C_1$  üçgeninin açılarını  $ABC$  üçgeninin açıları cinsinden ifade ediniz.

**Çözüm.**  $AC_1B_1$ ,  $BA_1C_1$  ve  $CB_1A_1$  üçgenleri ikizkenar üçgenlerdir.



Dolayısıyla

$$m(\widehat{BA_1C_1}) = m(\widehat{BC_1A_1}) = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$$

ve

$$m(\widehat{CB_1A_1}) = m(\widehat{CA_1B_1}) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$$

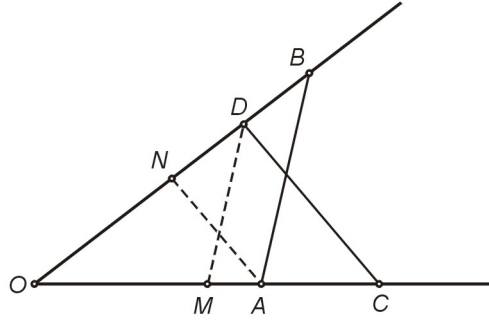
olduğunu biliyoruz. Buradan da,

$$\alpha_1 = 180^\circ - m(\widehat{BA_1C_1}) - m(\widehat{CA_1B_1}) = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$$

elde edilir. Benzer şekilde  $\beta_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$  ve  $\gamma_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$  olarak bulunur.

93.  $p$  ve  $q$  yarıdoğruları  $O$  noktasında kesişiyorlar.  $A$  ve  $C$  noktaları  $p$  üzerinde,  $B$  ve  $D$  noktaları  $q$  üzerinde olmak üzere,  $CD$  doğrusu  $OAB$  üçgeninin  $A$  köşesinden çizilen kenarortayına paralel olduğuna göre  $AB$  kenarının  $OCD$  üçgeninin  $D$  köşesinden çizilen kenarortayına paralel olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $D$  noktasından  $AB$  doğrusuna çizilen paralelin  $p$  noktasını kestiği yere  $M$  ve  $A$  noktasından  $DC$  doğrusuna çizilen paralelin  $q$  noktasını kestiği yere  $N$  diyelim.



$OAB$  ve  $OMD$  üçgenlerinin benzerliğinden  $\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OD|}{|OB|}$  ve benzer şekilde  $OCD$  ve  $OAN$  üçgenlerinin benzerliğinden  $\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|ON|}{|OD|}$  bulunur. Yani  $|OM| \cdot |OB| = |OC| \cdot |ON|$  dir.  $CD$  doğrusu  $OAB$  üçgeninin kenarortayına paralel olduğu için  $\overline{AN}$  kenarortaydır. Dolayısıyla  $\overline{OB}$  kenarının orta noktası  $N$  dir. Yani,  $|OB| = 2|ON|$  dir.  $|OM| \cdot |OB| = |OC| \cdot |ON|$  den dolayı  $|OC| = 2|OM|$  dir.  $\overline{OC}$  kenarının orta noktası  $M$  dir yani sonuç olarak  $\overline{DM}$  doğrusu  $OCD$  üçgeninin kenarortaydır.

94. Bir  $ABC$  üçgeninde,  $|AB| = |AC|$ ,  $D$  noktası  $[BC]$  nin orta noktası olsun.  $M$ ,  $[AD]$  nin orta noktası ve  $N$  noktası  $D$  noktasının  $[BM]$  üzerindeki dik izdüşümü olmak üzere,  $m(\widehat{ANC}) = 90^\circ$  olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.**  $ABDS$  paralelkenar olacak şekilde bir  $S$  noktası alalım.  $ADCS$  nin bir dikdörtgen olduğu açıktır.  $R$  noktası dikdörtgenin köşegenlerinin kesişim noktası olsun.  $DNS$  dik üçgeninde  $[NR]$ ,  $[SD]$  ye ait kenarortay olduğundan  $|NR| = 1/2 \cdot |SD| = 1/2 \cdot |AC|$  olur.

$R$  noktası  $[AC]$  nin orta noktası ve  $|NR| = 1/2 \cdot |AC|$  olduğu için  $ANC$  üçgeni dikaçılı bir üçgendir. Yani,  $m(\widehat{ANC}) = 90^\circ$  dir.

95.  $ABC$ ,  $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$  ve  $|AB| = |AC|$  olacak şekilde bir üçgen olsun.  $BC$  kenarı üzerindeki  $N$  noktası ise, yine  $BC$  kenarı üzerindeki  $M$  noktası ve  $C$  noktasının arasında olacak şekilde ve

$$|BM|^2 - |MN|^2 + |NC|^2 = 0$$

eşitliğini sağladığına göre,  $m(\widehat{MAN}) = 45^\circ$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** Kosinüs Teoreminden,

$$|MN|^2 = |AM|^2 + |AN|^2 - 2|AM| \cdot |AN| \cdot \cos(\widehat{MAN}) \quad (18)$$

olduğunu biliyoruz. Yine Kosinüs Teoreminden

$$|AM|^2 = |AB|^2 + |BM|^2 - 2|AB| \cdot |BM| \cdot \cos(45^\circ)$$

ve

$$|AN|^2 = |AC|^2 + |CN|^2 - 2|AC| \cdot |CN| \cdot \cos(45^\circ)$$

bulunur. Burada (18) eşitliğinde  $|AM|^2$  ve  $|AN|^2$  değerlerini yerlerine yazdığımızda,  $|AB| = |AC|$  olduğundan

$$\cos(\widehat{MAN}) = \frac{2|AB|^2 - |AB| \cdot |BM|\sqrt{2} - |AB| \cdot |CN|\sqrt{2}}{2|AM| \cdot |AN|} \quad (19)$$

elde ederiz. Öte yandan,

$$\begin{aligned} \text{Alan}(MAN) &= \text{Alan}(ABC) - \text{Alan}(ABM) - \text{Alan}(ACN) \\ &= \frac{2|AB|^2 - |AB| \cdot |MB|\sqrt{2} - |AB| \cdot |CN|\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

ve

$$\text{Alan}(MAN) = \frac{|AM| \cdot |AN| \sin(\widehat{MAN})}{2}$$

olduğunu bildiğimizden, bu iki eşitliği birleştirdiğimizde

$$\sin(\widehat{MAN}) = \frac{2|AB|^2 - |AB| \cdot |BM|\sqrt{2} - |AB| \cdot |CN|\sqrt{2}}{2|AM| \cdot |AN|} \quad (20)$$

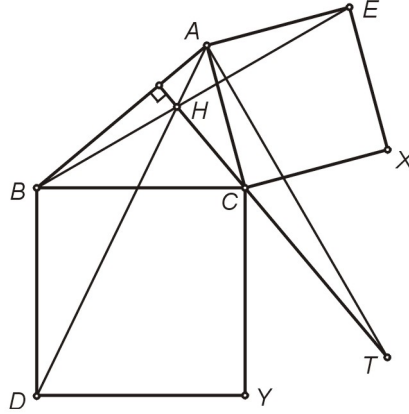
eşitliğini elde ederiz.

Sonuç olarak, (19) ve (20) eşitliklerini kullanarak  $\tan(\widehat{MAN}) = 1$  olarak bulunur.

Yani  $m(\widehat{MAN}) = 45^\circ$  dir.

96. Dar açılı  $ABC$  üçgeninin  $AC$  ve  $BC$  kenarlarının dış tarafında  $ACXE$  ve  $CBDY$  kareleri bulunmaktadır. Bu durumda  $AD$  ve  $BE$  doğrularının kesiştiği noktanın,  $ABC$  üçgeninin  $C$  noktasından inen yüksekliği üzerinde olduğunu gösteriniz.

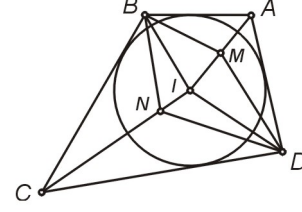
**Çözüm.**  $AD$  ve  $BE$  doğrularının kesiştiği noktaya  $H$  diyelim. Ayrıca  $AT \perp EB$  ve  $CT \perp AB$  olmak üzere de bir  $T$  noktası olsun. Bu durumda  $|EA| = |AC|$ ,  $m(\widehat{BEA}) = m(\widehat{TAC})$  ve  $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ATC})$  olduğundan  $EAB$  ve  $ACT$  üçgenleri benzerdir. Dolayısıyla  $|CT| = |AB|$  olur.



Şimdi  $BT' \perp AD$  ve  $CT' \perp AB$  olacak şekilde bir  $T'$  noktası olsun. Yukarıdakine benzer bir argümanla  $ABD$  ve  $T'CD$  üçgenlerinin benzer üçgenler olduğu görülür ve dolayısıyla  $|CT'| = |AB|$  olur. Bu durumda  $|CT| = |CT'|$  olur ki bu da  $T$  ve  $T'$  noktalarının aynı nokta olduğunu gösterir. Burada  $ABT$  üçgeninin yükseklikleri  $BE$ ,  $AD$  ve  $TC$  doğruları üzerindedir. Dolayısıyla  $H$  noktası diklik merkezidir ve  $CT$  doğrusu üzerinde yer almaktadır. Sonuç olarak  $AD$  ve  $BE$  doğrularının kesiştiği nokta  $ABC$  üçgeninin  $AB$  kenarına inen yüksekliğin üzerindedir.

97. Bir dışbükey  $ABCD$  dörtgeninin iç teğet çemberinin merkezi  $I$  olsun.  $m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{ABC})/2$  olacak şekilde,  $[AI]$  ve  $[CI]$  doğru parçaları üzerinde, sırasıyla,  $M$  ve  $N$  noktaları seçilsin.  $m(\widehat{MDN}) = m(\widehat{ADC})/2$  olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.**  $[BI]$ ,  $ABC$  açısının açıortayı olduğu için,  $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{B})/2$  dir. Dolayısıyla,  $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{IBN})$  ve  $m(\widehat{MBI}) = m(\widehat{NBC})$  olur.  
 $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{IBN}) = \alpha_1$ ,  $m(\widehat{MBI}) = m(\widehat{NBC}) = \alpha_2$ ,  $m(\widehat{ADM}) = \beta_1$ ,  $m(\widehat{MDI}) = \beta_2$ ,  $m(\widehat{IDN}) = \beta_3$  ve  $m(\widehat{NDC}) = \beta_4$  olsun.  
 $AMB$  ve  $MBI$  üçgenlerinde sinüs teoreminden



$$\frac{|AM|}{\sin \alpha_1} = \frac{|BM|}{\sin(\widehat{A}/2)} \quad \text{ve} \quad \frac{|MI|}{\sin \alpha_2} = \frac{|BM|}{\sin(\widehat{BIM})}$$

elde edilir.  
Dolayısıyla

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{|AM| \cdot \sin(\widehat{A}/2)}{|MI| \cdot \sin(\widehat{BIA})}$$

bulunur. Benzer şekilde,  $AMD$  ve  $MID$  üçgenlerinden

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{|AM| \cdot \sin(\widehat{A}/2)}{|MI| \cdot \sin(\widehat{DIA})}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin(\widehat{DIA})}{\sin(\widehat{BIA})} \quad (*)$$

olur. Benzer şekilde, önce  $IBN$  ve  $NBC$ , sonra da  $IDN$  ve  $NDC$  üçgenlerinde sinüs teoremini kullanıp

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \beta_4}{\sin \beta_3} \cdot \frac{\sin(\widehat{DIC})}{\sin(\widehat{BIC})} \quad (**)$$

elde ederiz. Şimdi  $ABI$  ve  $DIC$  üçgenlerini düşünelim:

$$\begin{aligned} m(\widehat{BIA}) &= 180^\circ - \frac{m(\widehat{A})}{2} - \frac{m(\widehat{B})}{2} \\ &= \left( \frac{m(\widehat{A})}{2} + \frac{m(\widehat{B})}{2} + \frac{m(\widehat{C})}{2} + \frac{m(\widehat{D})}{2} \right) - \frac{m(\widehat{A})}{2} - \frac{m(\widehat{B})}{2} \\ &= \frac{m(\widehat{C})}{2} + \frac{m(\widehat{D})}{2} \\ &= 180^\circ - m(\widehat{DIC}) \end{aligned}$$

yani,  $\sin(\widehat{BIA}) = \sin(\widehat{DIC})$  dir. Benzer şekilde,  $AID$  ve  $IBC$  üçgenlerinden,



$\sin(\widehat{AID}) = \sin(\widehat{BIC})$  olduğunu görürüz. (\*) ve (\*\*) taraf tarafa çarpılırsa

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_4}$$

elde edilir.

$\beta_1 + \beta_2 = \beta_3 + \beta_4 = m(\widehat{D})/2 < 90^\circ$  olduğu için,  $f(\beta) = \frac{\sin \beta}{\sin(\frac{m(\widehat{D})}{2} - \beta)}$  fonksiyonu

$\beta \in (0, \frac{m(\widehat{D})}{2})$  aralığında artandır. Dolayısıyla,  $\beta_1 = \beta_3$  ve  $\beta_2 = \beta_4$  olur. Bu da bize  $m(\widehat{MDN}) = m(\widehat{D})/2$  verir.

98. Kenar uzunlukları  $a, b, c$  br olan bir üçgende  $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$  olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.** Eşitsizliğin sol tarafı aslında bütün  $a, b, c$  pozitif reel sayıları için geçerlidir. Bunu kanıtlamak için **yeniden düzenleme eşitsizliği**ni kullanacağız.

Bu eşitsizliğe göre,  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  ve  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  reel sayılar olsunlar.  $(c_1, c_2, \dots, c_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$  in herhangi bir permütasyonu olmak üzere,

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + \dots + a_n b_1$$

eşitsizliği geçerlidir ve eşitlik durumları ancak  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  permütasyonu  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  veya  $(b_n, b_{n-1}, \dots, b_1)$  halinde geçerlidir.

Yani,  $\{a_n\}$  ve  $\{b_n\}$  dizilerindeki terimlerin karşılıklı çarpımı, bu iki dizinin aynı şekilde (artan veya azalan olarak) sıralanması halinde maksimum ve ters sıralanması halinde minimum değerini alır.

Şimdi  $a \leq b \leq c$  olsun.  $\{a, b, c\}$  ve  $\{\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\}$  dizileri aynı şekilde (artan olarak) sıralanmıştır. İkinci dizinin  $\{\frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}\}$  ve  $\{\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}\}$  permütasyonlarını düşünersek,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

ve

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplayıp ikiye bölünce istenen eşitsizliğin sol tarafı bulunur. Eşitliğin de mümkün olabileceğini,  $a = b = c$  iken açıkça görürüz.

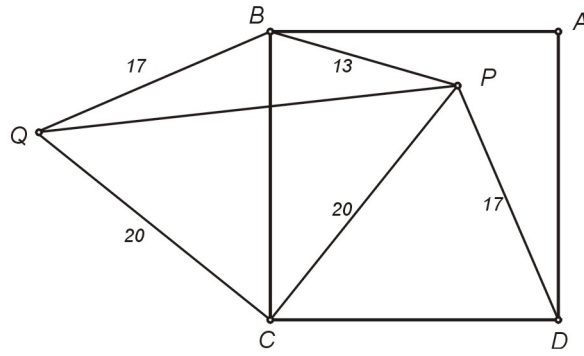
Eşitsizliğin sağ tarafını kanıtlamak için,  $a, b, c$  nin bir üçgenin kenar uzunlukları olduklarını dikkate almalıyız.

Her hangi bir üçgende,  $s = (a+b+c)/2$  olmak üzere,  $a+b > c$  olduğu için  $a+b > s$  dir. Dolayısıyla,  $\frac{c}{a+b} < \frac{c}{s}$  dir. Benzer şekilde,  $\frac{b}{a+c} < \frac{b}{s}$  ve  $\frac{a}{b+c} < \frac{a}{s}$  dir. Bu eşitsizlikleri

taraf tarafa toplarsak,  $\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c} < \frac{a+b+c}{s} = 2$  elde edilir.

99. Kare şeklindeki tarlanın içine yerleştirilmiş bir karınca, tarlanın köşelerinin birinden 13 metre, bu köşenin çapraz olarak karşısındaki köşeden 17 metre ve üçüncü bir köşeden de 20 metre uzaklıktadır. Tarlanın alanını bulunuz. Burada, arazinin düzgün olduğu varsayılmaktadır.

**Çözüm.** Karenin köşelerini  $A, B, C$  ve  $D$  olarak isimlendirelim. Karınca,  $|PB| = 13$ ,  $|PC| = 20$  ve  $|PD| = 17$  olacak şekilde bir  $P$  noktasındadır.  $CDP$  üçgenini,  $C$  noktasının etrafında saat yönünün tersinde  $90^\circ$  döndürürsek  $D$  noktası  $B$  'ye,  $P$  noktası da  $Q$  'ya gider. Tanımdan dolayı,  $s(\widehat{QCP}) = 90^\circ$  'dir. Bu yüzden, pisagor teoreminden  $|PQ| = 20\sqrt{2}$  olur. Ayrıca,  $PQC$  üçgeni ikizkenar olduğundan  $s(\widehat{CPQ}) = 45^\circ$  'dir.



Kosinüs kuralını  $BQP$  üçgenine uygulayarak,

$$17^2 = 13^2 + (20\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 13 \cdot 20\sqrt{2} \cdot \cos QPB$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan,  $\cos QPB = 17\sqrt{2}/26$  olur. O halde,  $\sin^2 QPB = 1 - \cos^2 QPB = 49/338$  'dir. Buradan,  $\sin QPB = 7\sqrt{2}/26$  olur.

$$s(\widehat{CPB}) = s(\widehat{QPB}) + s(\widehat{CPQ}) = s(\widehat{QPB}) + 45^\circ$$

olduğunu biliyoruz. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} \cos CPB &= \cos(QPB + 45^\circ) \\ &= \cos QPB \cdot \cos 45^\circ - \sin QPB \cdot \sin 45^\circ \quad \left( \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \right) \\ &= (\cos QPB - \sin QPB)/\sqrt{2} \\ &= (10\sqrt{2}/26)/\sqrt{2} \\ &= 5/13 \end{aligned}$$

bulunur. Kosinüs kuralını,  $CPB$  üçgenine uygulayarak

$$|BC|^2 = 20^2 + 13^2 - 2 \cdot 20 \cdot 13 \cdot (5/13) = 369$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla, tarlanın alanı  $369 \text{ m}^2$  olur.

**Not** Yukarıdaki method,  $|PB| = a$ ,  $|PD| = b$  ve  $|PC| = c$  olacak şekilde, genel durumları çözmek için kullanılabilir.  $|BC| = s$  dersek,

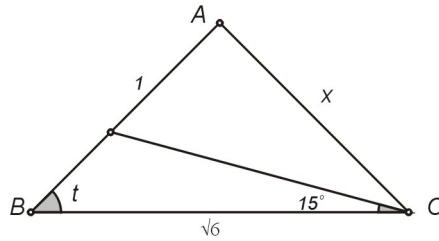
$$s^2 = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 + \sqrt{(4c^2(a^2 + b^2 - c^2) - (a^2 - b^2)^2)}].$$

eşitliğini elde ederiz. Yukarıdaki formülün  $a$  ve  $b$  'ye göre simetrik olduğuna dikkat etmeliyiz.

$|PA| = d$  olsun.  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$  olduğunu göstermek zor değildir. Bu durum, yukarıdaki çözüme kısa bir yol sağlar. Örneğin,  $(a, b, c) = (1, 7, 5)$  ise simetriden dolayı  $d = 5$  olur. 1 ve 7 ( $PB$  ve  $PD$ ) uzunluklarının uzaklıkları doğrusaldır. Bu yüzden, karenin köşegeni  $8 \text{ m}$  'dir. Dolayısıyla, alanı da  $32 \text{ m}^2$  'dir.

100. İkizkenar bir  $ABC$  üçgeninin ( $|AB| = |AC|$ )  $AB$  kenarı üzerinde  $BCD$  açısı  $15^\circ$  olacak şekilde bir  $D$  noktası yer almaktadır.  $|AD| = 1$  birim ve  $|BC| = \sqrt{6}$  birim ise  $CAB$  açısının ölçüsü kaç derecedir?

**Çözüm.**



$ABC$  açısının ölçüsüne  $t$ ,  $AC$  kenarının uzunluğuna da  $x$  diyelim.  $m(\widehat{ADC}) = t + 15$ ,  $m(\widehat{DCA}) = t - 15$  derece olur.  $ADC$  üçgeninde sinüs teoremini uygularsak

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{\sin(t - 15)}{\sin(t + 15)} \quad (21)$$

elde edilir.  $A$  köşesinden  $BC$  kenarına bir dikme inersek

$$\cos(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\sqrt{6}}{2x}$$

bulunur. Bu eşitliği kullanarak

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{1}{x} = \frac{2 \cos(t)}{\sqrt{6}} \quad (22)$$

yazabiliriz. (21) ve (22) numaralı denklemleri birbirine eşitleyerek  $t = 45^\circ$  in bir çözüm olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(45 - 15)}{\sin(45 + 15)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2 \cos(45)}{\sqrt{6}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$t = 45$  in tek çözüm olduğunu göstermek için (1) numaralı denklemin sağ tarafını dönüşüm formüllerini kullanarak açalım ve  $\sin(t) \sin(15)$  e bölelim;

$$\begin{aligned} \frac{\sin(t - 15)}{\sin(t + 15)} &= \frac{\sin(t) \cos(15) - \cos(t) \sin(15)}{\sin(t) \cos(15) + \cos(t) \sin(15)} \\ &= \frac{\cot(15) - \cot(t)}{\cot(15) + \cot(t)} \end{aligned}$$

$15 < t < 90$  olduğu açıktır. Bu aralıkta  $f(t) = \frac{2 \cos(t)}{\sqrt{6}}$  kesin azalan bir fonksiyondur. Verilen aralıkta  $\cot(t)$  azalan bir fonksiyon olduğu için  $g(t) = \frac{\cot(15) - \cot(t)}{\cot(15) + \cot(t)}$  kesin artan bir fonksiyondur.  $f(t)$  ve  $g(t)$  sürekli fonksiyonlar olduğu için  $t = 45$  tek çözümdür.

$t = 45^\circ$  olduğu için  $CAB$  açısı da dik açıdır.

101.  $n \geq 4$  olmak kaydıyla, her pozitif  $n$  tam sayısı için, herhangi bir üçgenin  $n$  ikizkenar üçgene ayrılabilirliğini gösteriniz.

**Çözüm.** Her üçgen, en uzun kenara olan yükseklik çizilerek (bu yükseklik her zaman üçgenin içinde yer alacağından), iki dik üçgene ayrılabilir. Bu iki dik üçgenin her biri ise, hipotenüse inen kenarortayı çizilerek iki ikizkenar üçgene ayrılabilir.

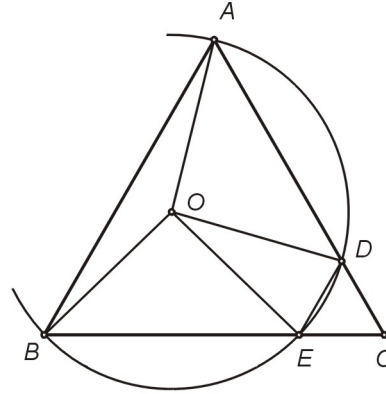
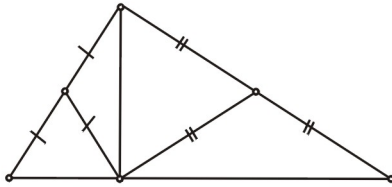
Eğer bu dört ikizkenar üçgenden birini daha yukarıdaki gibi dörde bölersek, böylece bir üçgeni yedi ikizkenar üçgene ayırmış oluruz. Bunu her yeni üçgene uygulayabildiğimize göre, bir üçgeni  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $4+3k$  ikizkenar üçgene bölebildiğimizi göstermiş olduk.

Şimdi bir üçgeni nasıl altı ikizkenar üçgene bölebileceğimize bakalım. Yine en uzun kenara yüksekliği çizerek başlayalım. Bu sefer dik üçgenlerden sadece birinin hipotenüs kenarortayını çizelim ve diğer üçgeni de dörde bölelim. Böylece üçgeni altı ikizkenar üçgene bölmüş olduk.

Burada her bir üçgenin de dört ikizkenar üçgene bölünebildiğini de bildiğimize göre, bir üçgeni  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $6 + 3k$  ikizkenar üçgene bölebildiğimizi göstermiş olduk.

Şimdi ise bir üçgeni nasıl beş ikizkenar üçgene bölebildiğimizi göstermeliyiz ki ispat tamamlanmış olsun. Üçgenin köşelerine  $A, B, C$  diyelim ve  $|AB| > |AC|$  olsun.  $AB$  üzerindeki bir noktaya ise,  $|AC| = |AD|$  olmak üzere  $D$  noktası diyelim. Bu durumda  $ACD$  üçgeni ikizkenar olur ve  $BCD$  üçgenini de bulduğumuz yöntemle dört ikizkenar üçgene bölerek,  $ABC$  üçgenini beş ikizkenar üçgene ayırmış oluruz. Buradaki her yeni üçgeni de dört ikizkenar üçgene bölebileceğimize, bir  $ABC$  üçgenini,  $|AB| > |AC|$  olmak kaydıyla,  $k \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $5 + 3k$  ikizkenar üçgene bölebildiğimizi göstermiş olduk.

Son olarak  $|AB| > |AC|$  olarak kabul edemeyeceğimiz durumu, yani üçgenin eşkenar olması durumunu inceleyelim. Bu durumda,  $AC$  kenarı üzerinde,  $C$  köşesinden farklı, ve  $|AD| > |DC|$  olmak üzere bir  $D$  noktası olsun.  $D$ 'den geçen ve  $AB$ 'ye paralel olan doğru ise  $BC$  ile  $E$  noktasında kesişsin. Bu durumda  $DCE$  üçgeni ikizkenar olur. Ayrıca  $ABED$  yamuğu da ikizkenar olacağından, köşeleri bir çember üzerindedir. Bu çemberin merkezi de  $ABED$  yamuğunun içinde olduğuna göre,  $AOB, BOE, EOD$  ve  $DOA$  ikizkenar üçgenlerdir.



102.  $ABC$  üçgeninin yükseklikleri  $h_a \geq 3$  cm,  $h_b \geq 4$  cm ve  $h_c \geq 5$  cm eşitsizliklerini sağladığına göre, bu üçgeninin alanının mümkün olan en küçük değerini bulunuz.

**Çözüm.**  $ABC$  üçgeninin kenarları  $a, b, c$  olsun. Bu durumda  $h_b$  yüksekliği  $B$  köşesinden  $AC$  doğrusuna olan en kısa doğru parçası olduğundan

$$c \geq h_b$$

eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla  $ABC$  üçgeninin alanı  $S$ ;

$$S = \frac{ch_c}{2} \geq \frac{h_b h_c}{2} \geq 10 \text{ cm}^2$$

eşitsizliğini sağlar.

Şimdi  $ABC$  üçgeninin alanı tam olarak  $10 \text{ cm}^2$  ise,  $S = \frac{ch_c}{2} \geq \frac{h_b h_c}{2} \geq 10 \text{ cm}^2$  eşitsizliklerinin her ikisi de eşitlik olmalıdır. Yani  $c = h_b = 4 \text{ cm}$  ve aynı zamanda  $h_c = 5 \text{ cm}$  olmalıdır. Burada birinci eşitlik  $ABC$  üçgeninin,  $A$  köşesindeki açısı dik olmak üzere bir dik üçgen olduğunu gösterir. Bu durumda dik kenar  $AC$ ,  $b = h_c = 5 \text{ cm}$  denklemini sağlar. Buradan da hipotenüs  $BC$ 'nin  $\sqrt{41}$  olduğu görülür.  $S = \frac{1}{2}ah_a$  alan formülünden ise

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{20}{\sqrt{41}} \text{ cm} > 3 \text{ cm}$$

elde edilir.

Sonuç olarak görülüyor ki, dik kenarları  $b = 5 \text{ cm}$  ve  $c = 4 \text{ cm}$  olan bir  $ABC$  dik üçgeni soruda istenen koşulları sağlar. Dolayısıyla verilen özellikleri taşıyan bir  $ABC$  üçgeninin mümkün olan en küçük alanı  $10 \text{ cm}^2$  olur.

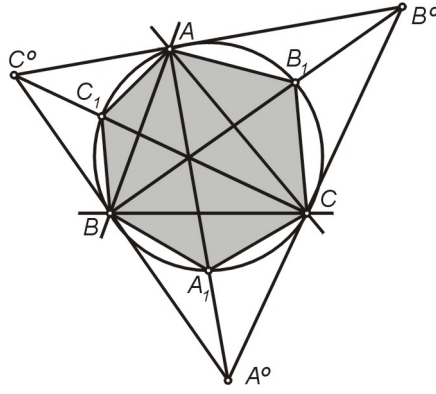
103.  $ABC$  üçgeninde  $A$  açısının açıortayı,  $ABC$  üçgeninin çevrelçemberi ile  $A_1$  noktasında kesişiyor. Aynı şekilde  $B$  açısının açıortayı çevrelçemberi  $B_1$  noktasında,  $C$  açısının açıortayı da  $C_1$  noktasında kesişiyor.  $AA_1$  doğrusu  $B$  ve  $C$  köşelerindeki dış açılarının açıortayları ile  $A^\circ$  noktasında kesişiyor.  $B^\circ$  ve  $C^\circ$  noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor.

$$\begin{aligned} \text{Alan}(A^\circ B^\circ C^\circ) &= 2 \cdot \text{Alan}(AC_1BA_1CB_1) \\ &\geq 4 \cdot \text{Alan}(ABC) \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

### Çözüm:

$I$  noktası, iç açıortayların kesişim noktası olsun. Öncelikle  $|A_1I| = |A_1A^0|$  olduğunu



gösterelim.

$$\begin{aligned}
 m(\widehat{A_1IB}) &= \frac{1}{2}m(\widehat{A}) + \frac{1}{2}m(\widehat{B}) \\
 m(\widehat{IBA_1}) &= \frac{1}{2}m(\widehat{B}) + \frac{1}{2}m(\widehat{A}) \\
 &\Rightarrow |IA_1| = |A_1B| \\
 m(\widehat{A_1A^\circ B}) &= 90^\circ - m(\widehat{A_1IB}) \\
 m(\widehat{A_1BA^\circ}) &= 90^\circ - m(\widehat{IBA_1}) \\
 &\Rightarrow |A_1B| = |A_1A^\circ| \\
 &\Rightarrow |IA_1| = |A_1A^\circ|
 \end{aligned}$$

O halde  $Alan(IA_1B) = Alan(A^\circ A_1B)$  olur.

$I$  noktasının bir köşesi olduğu ve altıgeni oluşturan diğer beş üçgende de aynı işlemi tekrarlayarak

$$Alan(A^\circ B^\circ C^\circ) = 2 \cdot Alan(AC_1BA_1CB_1)$$

olduğu bulunur.

Eşitsizliği ispatlamak için  $ABC$  üçgeninin yüksekliklerini çizelim. Bu yükseklikler  $H$  noktasında kesişsin.  $H$  noktasının  $BC$  kenarına göre simetriği  $X$ ,  $AC$  kenarına göre simetriği  $Y$ ,  $AB$  kenarına göre simetriği de  $Z$  olsun. Bu noktalar  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir.

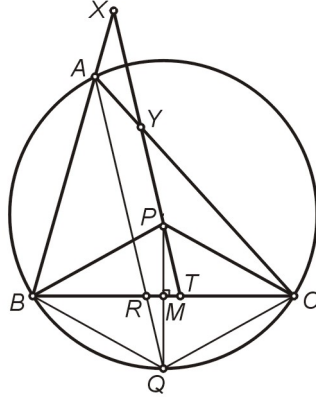
$A_1$ ,  $BC$  yayının orta noktası olduğundan  $Alan(BA_1C) \geq Alan(BXC)$  'dir. O halde

$$\begin{aligned}
 Alan(A^\circ B^\circ C^\circ) &= 2 \cdot Alan(AC_1BA_1CB_1) \\
 &\geq 2 \cdot Alan(AZBXC_Y) \\
 &= 4 \cdot (Alan(BHC) + Alan(CHA) + Alan(AHB)) \\
 &= 4 \cdot Alan(ABC)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

104.  $AC$  kenarı  $AB$  kenarından uzun olan bir  $ABC$  üçgeni verilsin.  $BX = CA$  olacak şekilde  $BA$  kenarını  $A$  yönünde uzatalım.  $CY = BA$  olacak şekilde  $CA$  kenarı üzerinde  $Y$  noktasını alalım.  $BC$  kenarının orta dikmesinin  $XY$  doğrusu ile kesiştiği yere  $P$  diyelim.  $m(\widehat{BPC}) + m(\widehat{BAC}) = 180^\circ$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm**  $CAB$  açısının açı ortayının  $BC$  kenarını kestiği noktaya  $R$ ,  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberini kestiği noktaya  $Q$  diyelim.  $XY$  doğrusunun  $BC$  kenarını kestiği nokta  $T$  ve  $BC$  kenarının orta noktası  $M$  olsun.  $BQ = QC$  ve  $m(\widehat{BAQ}) = m(\widehat{QAC})$  olduğu için  $Q$  noktası  $PM$  doğrusu üzerindedir.



$AB = CY$  ve  $BX = CA$  olduğundan dolayı  $AX = YA$  dir. Dolayısıyla,  $XAY$  üçgeni ikizkenardır. Bu durumda,  $m(\widehat{XYA}) = m(\widehat{YXA}) = (180^\circ - m(\widehat{XAY}))/2 = m(\widehat{CAR})$  dir. Dolayısıyla  $XY$  doğrusu  $AR$  doğrusuna paraleldir. Buradan  $ACR$  üçgeni ile  $YCT$  üçgeni benzerlerdir.  $\frac{CT}{CR} = \frac{CY}{YA} = \frac{BA}{CA}$ . Açıortay teoreminden,  $\frac{BR}{CR} = \frac{BA}{CA}$  dir. Son iki denklemden,  $CT = BR$  bulunur.  $M$   $BC$  kenarının orta noktası olduğundan dolayı  $MR = MT$  dir.  $m(\widehat{PMT}) = m(\widehat{QMR})$  ve  $PT$  ile  $RQ$  paralel olduklarından dolayı  $PMT$  üçgeni ile  $QMR$  üçgeni denkleştir. Dolayısıyla  $PM = QM$  dir. Buradan,  $BMP$  üçgeni ile  $BMQ$  üçgenlerinin denk oldukları söylenebilir. Dolayısıyla,

$$m(\widehat{PBM}) = m(\widehat{QBM})$$

$$= m(\widehat{CAQ}) \text{ (aynı açığı gören çevre açısı)}$$

$$= m(\widehat{BAC})/2 \text{ (AQ, BAC açısının açı ortayı olduğu için)}$$

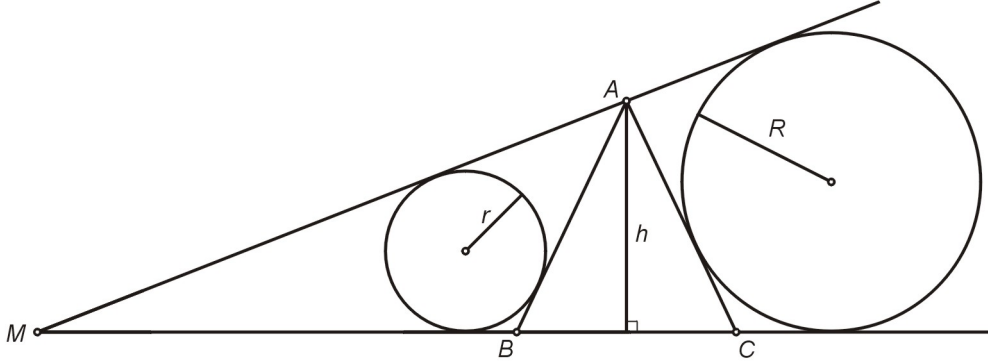
$PMB$  açısı dikaçı olduğu için,  $m(\widehat{BPC}) = 2m(\widehat{BPM}) = 180^\circ - 2m(\widehat{PBM})$  dir. Buradan istenen sonuç  $m(\widehat{BPC}) + m(\widehat{BAC}) = 180^\circ$  elde edilir.

105.  $ABC$  ikizkenar ( $|AB| = |AC|$ ) üçgeni veriliyor.  $B \in |MC|$  olacak şekilde bir  $M$  noktası seçiliyor.  $AMB$  üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı ile  $AMC$  üçgeninin



$M$  köşesine karşılık gelen dış teğet çemberinin yarıçapı toplamının sabit olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm.**



$MAC$  üçgenine Stewart Teoremini uygularsak:

$$|MA|^2 \cdot |BC| + |AC|^2 \cdot |MB| = |AB|^2 \cdot |MC| + |MB| \cdot |MC| \cdot |BC|$$

eşitliğini elde ederiz.  $|AB| = |AC|$  olduğuna göre eşitliği:

$$|MA|^2 \cdot |BC| = |AB|^2 \cdot |MC - MB| + |MB| \cdot |MC| \cdot |BC|$$

şekline getirebiliriz ve  $|MC| - |MB| = |BC|$  olduğuna göre:

$$|MA|^2 = |AB|^2 + |MB| \cdot |MC|$$

eşitliğini elde ederiz.

$MAB$  üçgeninin içteğet çemberinin yarıçapı  $r$ ,  $MAC$  üçgeninin  $M$  kenarına karşılık gelen dış teğet çemberinin yarıçapı  $R$ ,  $A$  dan  $BC$  kenarına indirilen dikme  $h$  olmak üzere,

$$r = \frac{2 \cdot A(\triangle MAB)}{|MA| + |MB| + |AB|} \quad \text{ve} \quad R = \frac{2 \cdot A(\triangle MAC)}{|MA| + |MB| - |AB|} \quad \text{yazılabilir.}$$

Eşitlikleri  $h$  ye bölersek:

$$\frac{r}{h} = \frac{|MB|}{|MA| + |MB| + |AB|} \quad \text{ve} \quad \frac{R}{h} = \frac{|MC|}{|MA| + |MB| - |AB|} \quad \text{elde ederiz.}$$

Buradan da

$$\frac{r + R}{h} = \frac{|MB|(|MA| + |MC| - |AB|) + |MC|(|MA| + |MB| + |AB|)}{(|MA| + |MB| + |AB|) \cdot (|MA| + |MC| - |AB|)}$$

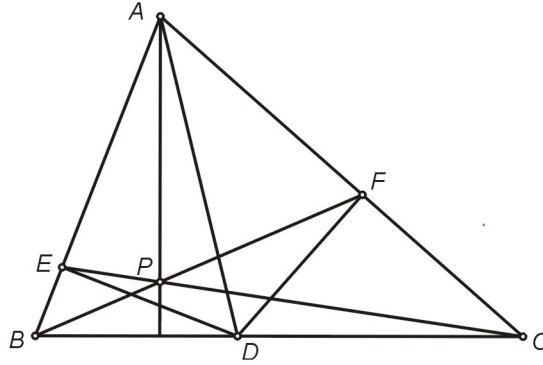
bulunur. Paydayı açıp  $|MA|^2$  yerine yukarıda bulduğumuz eşitliği yazarsak

$$\frac{r+R}{h} = \frac{|MB|(|MA| + |MC| - |AB|) + |MC|(|MA| + |MB| + |AB|)}{|MB| \cdot |MC| + |MB| \cdot |MA| - |MB| \cdot |AB| + |MC| \cdot |MA| + |MC| \cdot |MB| + |MC| \cdot |AB|}$$

$\frac{r+R}{h} = 1$  buluruz. Bu eşitlikten de  $r + R = h$  elde edilir. Diğer bir deyişle  $r + R$  seçilen  $M$  noktasından bağımsız olmadan sabit ve  $h$  ye eşittir.

106.  $ABC$  dar açılı bir üçgendir.  $BC$  kenarı üzerinde bir  $D$  noktası alalım.  $E$  ve  $F$  noktaları da sırasıyla,  $D$  noktasının  $AB$  ve  $AC$  kenarlarına dik izdüşümü olsun.  $BF$  ve  $CE$  doğrularının kesiştiği noktaya da  $P$  diyelim.  $AD$  doğrusunun  $BAC$  üçgeninin açıortayı olmasının ancak ve ancak  $AP$  ve  $BC$  doğrularının birbirine dik olması durumunda olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $a, b, c, x, y$  sırasıyla  $BC, CA, AB, BD$  ve  $DC$  kenarlarının uzunlukları olsun.  $A$  köşesinden  $BC$  ye inilen dikme ayağına  $A'$  diyelim.



Eğer  $AP, BC$  ye dik ise Ceva Teoreminden  $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1$  eşitliğini elde ederiz. Ayrıca  $AD$  doğrusunun açıortay olması  $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$  ile eşdeğerdir.

Elde ettiğimiz bu iki eşitliğin eşdeğer olduğunu göstermek yeterlidir.

$|CF| = y \cdot \cos(C)$ ,  $|FA| = b - y \cdot \cos(C)$ ,  $|BE| = x \cdot \cos(B)$ ,  $|AE| = c - x \cdot \cos(B)$ ,  $|BA'| = c \cdot \cos(B)$  ve  $A'C = b \cdot \cos(c)$  olduğuna göre eşitliği

$$\cos(B) \cdot y \cos(C) \cdot (c - x \cdot \cos(B)) = b \cos(C) \cdot (b - y \cdot \cos(C)) \cdot x \cos(B)$$

şekline çevirebiliriz. Buradan da

$$cy \cdot (c - x \cdot \cos(B)) = bx \cdot (b - y \cdot \cos(C))$$

elde edilir. Kosinüs teoreminden yararlanarak  $\cos(B)$  yerine  $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$  ve  $\cos(C)$

yerine  $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$  yazarsak, eşitlik

$$c^2y - cxy \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = b^2x - bxy \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

haline dönüşür. Bu da

$$c^2y(a - x) = b^2x(a - y)$$

ile eşdeğerdir.  $a - x = y$  ve  $a - y = x$  olduğuna göre  $c^2y^2 = b^2x^2$  yani  $cy = bx$  eşitliğini elde ederiz ki bu da  $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$  ile eşdeğerdir.

107. İki benzer üçgenin tam sayı değerli kenar uzunluklarının ikisi birbirine eşit olsun. Üçüncü kenarlarının farkı 20141 ise, bütün kenarlarını bulunuz.

**Çözüm:** Küçük üçgenin kenar uzunluklarının  $a \leq b \leq c$  için  $(a, b, c)$  olduğunu varsayalım. O halde, büyük üçgenin kenar uzunlukları  $ka \leq kb \leq kc$  için  $(ka, kb, kc)$  olur. Burada,  $k > 1$  rasyonel sayı olup, benzerlik oranıdır.

$a < ka$  ve  $kc > c$  olduğu açıktır. Bu yüzden, ne  $a$  ne de  $kc$  ortak kenar olamaz.

Dolayısıyla, ortak kenarlar  $b = ka$  ve  $c = kb = k^2a$  olmak zorundadır.

O halde, küçük üçgenin kenar uzunlukları  $(a, ka, k^2a)$ , büyük üçgenin kenar uzunlukları ise  $(ka, k^2a, k^3a)$  olur.

$k = n/m$ ,  $(n, m) = 1$  olacak şekilde bir kesir olsun.

En uzun kenarı dikkate alalım,  $k^3a = an^3/m^3$  olur.

$k = n/m$ ,  $(n, m) = 1$  olacak şekilde bir kesir olduğu için, ya  $m = 1$  'dir, ya da  $(m > 1$  ise)  $m^3$ ,  $n^3$ 'ü bölemez.

Her iki durumda da  $m^3$ ,  $a$ 'yı bölmek zorundadır.

$p$  bir tam sayı olmak üzere,  $a = pm^3$  olsun. O halde, kenarlar  $(pm^3, pm^2n, pmn^2)$  ve  $(pm^2n, pmn^2, pn^3)$  şeklinde yazılırlar.

Ortak olmayan iki kenar arasındaki farkın 20141 olduğunu biliyoruz.

Bu yüzden,  $pn^3 - pm^3 = p(n - m)(n^2 + nm + m^2) = 20141$  'dir.

20141 sayısının asal çarpanları 11 ve 1831 'dir.

Aritmetiğin temel teoreminden, yukarıdaki asal çarpanlar tektir ve bu yüzden,  $p$ ,  $(n - m)$  ve  $(n^2 + nm + m^2)$  değerlerinin her biri, 1, 11, 1831 ya da 20141 sayılarından birini almak zorundadır.

Aşağıda, bu dört durumu dikkate alalım :  $n - m = 1, 11, 1831$  ya da 20141.

**$n - m = 1831$  ve  $n - m = 20141$  durumu:**

Bu iki durumda da,  $n > 1831$  ve bu yüzden  $n^2 + nm + m^2 > 11$  olacağından  $(n - m)(n^2 + nm + m^2) > 20141$  olur. Dolayısıyla, bu iki durumun olması mümkün değildir.

**$n - m = 1$  durumu:**

$n - m = 1$  olduğunu varsayalım.

O halde,  $n^2 + nm + m^2 = (m + 1)^2 + m(m + 1) + m^2 = 3m^2 + 3m + 1$  'dir.

$3m^2 + 3m + 1 = 11$  ve  $3m^2 + 3m + 1 = 1$  denklemlerinin pozitif tam sayı çözümlerinin olmadığını kolayca görebiliriz.

Şimdi,  $3m^2 + 3m + 1 = 1831$  denklemini dikkate alalım. Sadeleştirme yaparak  $m^2 + m - 610 = 0$  denklemini elde ederiz.

İkinci dereceden denklemin diskriminantını, bir tam sayının karesi şeklinde yazamayacağımızdan dolayı, denklemin kökleri irrasyoneldir.

Benzer şekilde,  $3m^2 + 3m + 1 = 20141$  denklemini dikkate alırsak, denklemin köklerinin irrasyonel olduğunu görürüz.

#### **$n - m = 11$ durumu:**

Son olarak,  $n - m = 11$  olduğunu varsayalım.

O halde,  $n^2 + nm + m^2 = (m + 11)^2 + m(m + 11) + m^2 = 3m^2 + 33m + 121$  'dir.

$3m^2 + 33m + 121 = 11$  ve  $3m^2 + 33m + 121 = 1$  denklemlerinin pozitif tam sayı çözümlerinin olmadığını kolayca görebiliriz.

Şimdi,  $3m^2 + 33m + 121 = 1831$  denklemini dikkate alalım. Sadeleştirme yaparak  $m^2 + 11m + 570 = 0$  denklemini elde ederiz.

Diskriminant yardımıyla, denklemin köklerinin  $m = (-11 \pm \sqrt{2401})/2$  olduğunu buluruz. Sadece  $m = 19$  pozitif köktür. Bu durumda,  $n = 30$  bulunur.

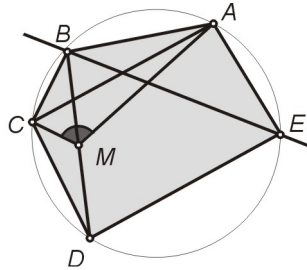
Bu yüzden,  $(n - m)(n^2 + nm + m^2) = 11 \times 1831 = 20141$  ve  $p = 1$  olur.

Dolayısıyla, benzerlik kriterini sağlayan tek aday çifti  $(6859, 10830, 17100)$  ve  $(10830, 17100, 27000)$  'dir.

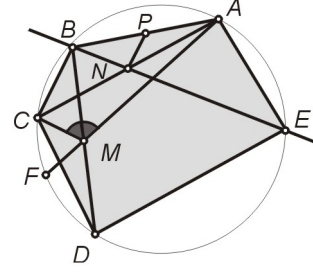
Kenar uzunluklarından oluşan her iki kümede üçgen eşitsizliğini (herhangi iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyüktür) sağlar.

Sonuç olarak, üçgenlerin kenarları  $(6859, 10830, 17100)$  ve  $(10830, 17100, 27000)$  'dir.

108. Köşeleri bir çemberin üzerinde bulunan  $ABCDE$  beşgeninde,  $AC \parallel DE$  ve  $M$ ,  $BD$  doğru parçasının orta noktasıdır.  $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BMC})$  olduğunda  $BE$  nin  $AC$  yi iki eşit parçaya ayırdığını gösteriniz.



**Çözüm.**  $BE$ ,  $AC$  ile  $N$  noktasında kesişsin ve  $P$  de  $AB$  nin orta noktası olsun.  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC}) = \alpha$ ,  $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CBD}) = \beta$  ve  $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ACB}) = \gamma$  olarak belirtelim. Buradan  $ABN$  ve  $DBC$  nin benzer üçgenler oldukları görülür. Bu üçgenlerde  $AB$  ve  $BD$  kenarlarına bakan açılar eşit ve  $P$ ,  $AB$  nin,  $M$  de  $BD$  nin orta noktaları oldukları için  $BPN$  ve  $BMC$  üçgenlerinin benzer oldukları bulunur.



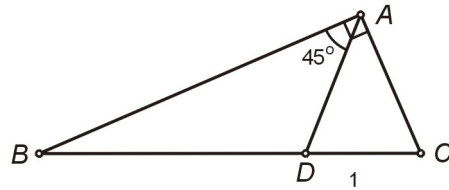
$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{BMC}) = \varphi$  olsun.  $BPN$  ve  $BMC$  üçgenlerinin benzerliğinden  $m(\widehat{BPN}) = \varphi$  elde edilir.

$AM$  doğru parçasını uzatalım ve çemberle ikinci kere kesiştiği noktaya  $F$  diyelim.  $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{DMF})$  den  $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{DMF})$  elde edilir.  $CM$  ve  $FM$ ,  $AB$  yi iki eşit parçaya ayırdığı ve  $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{DMF})$  olduğu için eş üçgenler veya simetri kullanılarak  $CM = FM$  olduğu kolayca görülebilir. Buradan  $DMF$  ve  $BMC$  nin eş üçgenler olduğu ve dolayısı ile  $BC = DF$ ,  $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{BDC}) = \alpha$  elde edilir.

$DF = BC$  olduğu için bu doğru parçalarının gördükleri yaylar da eşit olacaktır. Buradan  $m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{BDC})$  elde edilir.  $AMD$  üçgeninin açıları incelenirse  $\varphi = \alpha + \gamma$  olduğu görülür.  $APN$  üçgeninden  $m(\widehat{ANP}) = \varphi - \alpha = \gamma = m(\widehat{ACB})$  bulunur. Dolayısı ile  $NP \parallel BC$  dir ve bu da  $N$  nin  $AC$  nin orta noktası olduğunu gösterir.

109.  $ABC$  üçgeni,  $A$  noktasında dik açılı olsun.  $A$  köşesinden çizilen açıortay  $BC$  kenarını,  $D$  noktasında kessin. Dolayısıyla,  $s(\widehat{DAB}) = 45^\circ$  olur.  $|CD| = 1$  ve  $|BD| = |AD| + 1$  ise,  $AC$  ve  $AD$  uzunluklarını bulunuz.

**Çözüm.** Çeşitli üçgenlere, sinüs kuralı, kosinüs kuralı ve Pisagor teoremi uygulanabileceğinden, bu problemin bir kaç çözümünün olabileceğine hiç şüphe yoktur. Öncelikle  $AD$  uzunluğunu bulalım.  $|BD| = d$  olsun. Dolayısıyla,  $|AD| = d - 1$  olur. Sinüs kuralını, sırasıyla  $CAD$  ve  $ABD$  üçgenlerine uygulayarak,



$$\begin{aligned} (\sin C)/(d-1) &= (\sin 45^\circ)/1 = 1/\sqrt{2} \\ (\sin B)/(d-1) &= (\sin 45^\circ)/d = 1/(d\sqrt{2}) \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz.  $\sin B = |AC|/|BC| = \cos C$  olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

yukarıdaki iki eşitlikte; her iki tarafın karesini alıp, taraf tarafa toplarsak,

$$1/(d-1)^2 = 1/2 + 1/(2d^2)$$

eşitliğini buluruz. Eşitliğin her iki tarafını  $2d^2(d-1)^2$  ile çarpıp, gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$d^4 - 2d^3 - 2d + 1 = 0$$

denklemini elde ederiz. Dördüncü dereceden denklemleri çözmek zor olmasına rağmen, bu özel denklemin derecesini, bir dönüşüm yaparak yarıya indirebiliriz. Denklem katsayılar dizisinin  $(1, -2, 0, -2, 1)$  palindrom (tersinden de aynı şekilde okunabilen sözcük ya da cümle) şeklinde olduğuna dikkat edelim.  $d = 0$  bir kök olmadığı için, denklemi  $d^2$  ile bölersek,

$$d^2 - 2d - 2/d + 1/d^2 = 0$$

denklemini elde ederiz.  $u = d + 1/d$  dönüşümünü yaparsak,  $u^2 = d^2 + 1/d^2 + 2$  olur. Dolayısıyla,

$$u^2 - 2u - 2 = (u - 1)^2 - 3 = 0$$

denklemini elde ederiz. Reel olmayan  $d$  değerleri elde edeceğimiz için  $u$  'nun negatif değerini almayız. Bu yüzden,

$$u = d + 1/d = 1 + \sqrt{3} \quad (1)$$

sonucuna ulaşırız. Bu denklemi,  $d$  ile çarpıp, yeniden düzenlersek

$$d^2 - (1 + \sqrt{3})d + 1 = 0$$

eşitliğini elde ederiz. İkinci dereceden bu denklemi çözersek  $d = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{2}\sqrt[4]{3})$  buluruz.

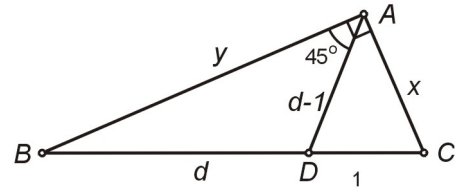
$|AD| = d - 1$  uzunluğu pozitif olmak zorundadır. Dolayısıyla,  $d$  'nin küçük olan değeri 1 'den küçük olduğu için,  $AD$  uzunluğu  $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt[4]{3})$  olur.

Şimdi de  $AC$  uzunluğunu bulalım.

$|AC| = x$  ve  $|AB| = y$  olsun. Sinüs kuralını, sırasıyla  $CAD$  ve  $ABD$  üçgenlerine uygulayarak,

$$1/\sin 45^\circ = x/\sin ADC$$

$$d/\sin 45^\circ = y/\sin BDA$$



eşitliklerini elde ederiz.

$\sin BDA = \sin(180^\circ - \widehat{ADC}) = \sin ADC$  olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,  $x =$

$\sin ADC / \sin 45^\circ$  ve  $y = d \sin ADC / \sin 45^\circ$  'dir. Bu yüzden,  $y = d \cdot x$  olur.

$ABC$  üçgenine Pisagor teoremini uygularsak,

$$x^2 + y^2 = (d + 1)^2$$

denkleminde ulaşırız.  $y = d \cdot x$  değişikliğini yaparsak  $x^2(d^2 + 1) = (d + 1)^2$  denklemini elde ederiz. Bu yüzden  $x^2 = (d^2 + 2d + 1)/(d^2 + 1) = 1 + 2d/(d^2 + 1)$  olur.

(1) 'den  $d + 1/d = (d^2 + 1)/d = 1 + \sqrt{3}$  'tür. Bu yüzden,  $2d/(d^2 + 1) = 2/(1 + \sqrt{3})$  olur. Paydayı kareköklü ifadede kurtarmak için, paydayı eşleniğiyle çarparak

$$2d/(d^2 + 1) = 2(\sqrt{3} - 1)/[(1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)] = \sqrt{3} - 1$$

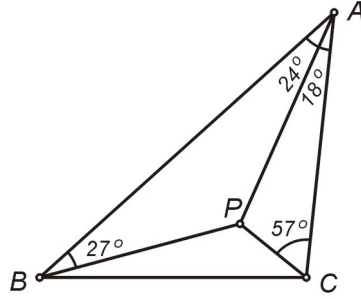
eşitliğini elde ederiz. Bu yüzden,  $x^2 = 1 + 2d/(d^2 + 1) = \sqrt{3}$  'tür.

Dolayısıyla,  $AC$  uzunluğu  $\sqrt[4]{3}$  olur.

**Not**  $AD$  uzunluğunu bulmak için,  $ADC$  üçgenine kosinüs kuralını uygulayarak  $AC$  uzunluğunun nümerik değerini buluruz. Ancak, bu denklemden tam sonucu elde etmek oldukça zordur.

$|AB|/|AC| = |BD|/|CD|$  olduğunu ispatlarken,  $ABC$  üçgeninin dik olması gerçeğini kullanmadığımıza dikkat etmeliyiz. Aslında bu, açıortay teoremi olarak bilinen genel bir sonuçtur.

110.  $ABC$  üçgeni içerisinde  $PAC$  açısı  $18^\circ$ ,  $PCA$  açısı  $57^\circ$ ,  $PAB$  açısı  $24^\circ$  ve  $PBA$  açısı  $27^\circ$  olacak şekilde bir  $P$  noktası olduğuna göre,  $ABC$  üçgeninin ikizkenar olduğunu gösteriniz.



**Çözüm.**  $\widehat{PBC}$  açısının ölçüsüne  $x$ ,  $\widehat{PCB}$  açısının ölçüsüne de  $y$  diyelim. Üçgenin iç açıları toplamı 180 olacağından;

$$18 + 24 + 27 + y + x + 57 = 180$$

$$126 + x + y = 180$$

$$x + y = 54$$

tür. O halde  $y = 54 - x$  dir.

$\widehat{CAB}$  açısıyla  $\widehat{ABC}$  açısının eşit olduğunu göstereceğiz.

$PAB$ ,  $PBC$  ve  $PCA$  üçgenlerine sinüs teoramini uygulayalım;

$$1 = \frac{|PA|}{|PB|} \cdot \frac{|PB|}{|PC|} \cdot \frac{|PC|}{|PA|} = \frac{\sin 27}{\sin 24} \cdot \frac{\sin(54 - x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin 18}{\sin 57}$$

Yani,

$$\sin 27 \cdot \sin(54 - x) \cdot \sin 18 = \sin 24 \cdot \sin x \cdot \sin 57 \quad (23)$$

$ABC$  bir ikiz kenar üçgen ise,  $x = 15$  olacağı açıktır. Önce  $x = 15$ 'in bir çözüm olduğunu gösterelim.  $x = 15$  i, (23) de yerine koyarsak ;

$$\sin 27 \cdot \sin 39 \cdot \sin 18 = \sin 24 \cdot \sin 15 \cdot \sin 57$$

elde ederiz. Bu eşitliğe

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c &= 2 \sin a [\cos(b - c) - \cos(b + c)] \\ &= \sin(a - b + c) + \sin(a + b - c) - \sin(a - b - c) - \sin(a + b + c) \end{aligned}$$

dönüşüm formülünü uygularsak

$$\sin 6 + \sin 48 - \sin(-30) - \sin 84 = \sin 66 + \sin(-18) - \sin(-48) - \sin 96$$

bulunur.

$$\sin 96 = \sin(180 - 96) = \sin 84$$

olduğundan bu eşitlik de

$$\frac{1}{2} + \sin 18 = \sin 66 - \sin 6$$

olarak sadeleşir. Sinüs-Kosinüs dönüşüm formüllerini kullanacak olursak

$$\sin 66 - \sin 6 = 2 \cdot \cos 36 \cdot \sin 30 = \cos 36$$

ve

$$\sin 18 = \cos 72$$

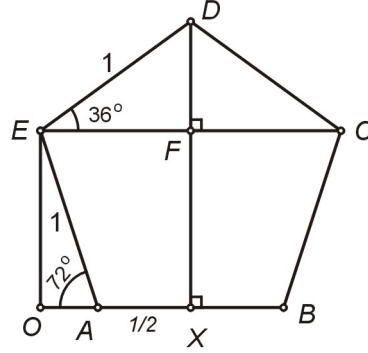
olduğu görülür. O halde denklemimiz

$$\cos 36 - \cos 72 = \frac{1}{2}$$



haline gelir.

Şimdi şekildeki gibi bir kenarının uzunluğu 1 olan düzgün bir  $ABCDE$  beşgenini ele alalım.



$ABCDE$  düzgün beşgen olduğu için  $m(\widehat{OAE}) = 72$  dir.  $|EC|$ ,  $|AB|$  ye paralel olduğundan  $m(\widehat{CEA}) = 72$  derecedir.  $\widehat{AED}$  açısının bütünleyeni de 72 olduğundan  $m(\widehat{DEC}) = 180 - 72 - 72 = 36$  dir. Ayrıca  $|DX|$ ,  $|AB|$  iki eşit parçaya ayırır.

Buradan  $|AX| = |OX| - |OA| = |EF| - |OA| = -\cos 72 + \cos 36 = \frac{1}{2}$  denklemimizi sağlar. Bu da, buraya kadar ki adımları tersden izlersek,  $x = 15$  in bir çözüm olduğunu gösterir.

(23) numaralı denklem,  $0 < x < 54$  olmak üzere bir  $k$  pozitif sayısı için,  $\frac{\sin x}{\sin(54-x)} = k$  şeklindedir.  $\sin x$  fonksiyonu kesin artan ve sürekli bir fonksiyon olduğu için  $\sin(54-x)$  de kesin azalan ve sürekli bir fonksiyondur. O halde  $\frac{\sin x}{\sin(54-x)}$  kesin artan ve sürekli bir fonksiyondur ve her  $k$  değerini yalnızca bir defa alır. Dolayısıyla  $x = 15$  tek çözümdür.

Dolayısıyla  $ABC$  üçgeni ikiz kenar üçgendir.

111. Dar açılı bir üçgenin iç açılarını  $A, B$  ve  $C$  ile gösterelim.

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B + \sin C &> 2 \\ \cos A + \cos B + \cos C &> 1 \\ \tan\left(\frac{A}{2}\right) + \tan\left(\frac{B}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right) &< 2\end{aligned}$$

eşitsizliklerini gösteriniz.

**Çözüm.**

- $[0, \frac{\pi}{2}]$  aralığında  $y = \sin x$  fonksiyonu ile  $y = \frac{2}{\pi}x$  doğrusunun kesişim noktaları

$(0, 0)$  ve  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  noktalarıdır.  $(0, \frac{\pi}{2})$  açık aralığında  $y = \sin x$  içbükey olduğundan her  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  için  $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$  dir.  $A + B + C = \pi$  ve  $0 < A, B, C \leq \frac{\pi}{2}$  olduğundan (eşitlik sadece bir durumda mümkündür)  $\sin A + \sin B + \sin C > \frac{2}{\pi}(A + B + C) = 2$  bulunur.

- $[0, \frac{\pi}{2}]$  aralığında  $y = \cos x$  fonksiyonu ile  $y = 1 - \frac{2}{\pi}x$  doğrusunun kesişim noktaları  $(0, 1)$  ve  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  noktalarıdır.  $(0, \frac{\pi}{2})$  açık aralığında  $y = \cos x$  içbükey olduğundan her  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  için  $\cos x \geq 1 - \frac{2}{\pi}x$  dir. Yani,  $\cos A + \cos B + \cos C > 3 - \frac{2}{\pi}(A + B + C) = 1$  dir.
- $[0, \frac{\pi}{4}]$  aralığında  $y = \tan x$  fonksiyonu ile  $y = \frac{4}{\pi}x$  doğrusunun kesişim noktaları  $(0, 0)$  ve  $(\frac{\pi}{4}, 1)$  noktalarıdır.  $(0, \frac{\pi}{4})$  açık aralığında  $y = \tan x$  dışbükey olduğundan  $(0 < x < \frac{\pi}{4}$  ise  $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x > 0$  dir)  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$  için  $\tan x \leq \frac{4}{\pi}x$  dir. Yani,  $\tan A + \tan B + \tan C < \frac{4}{\pi}(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}) = 2$  dir.

112. Bir  $ABC$  üçgeninde  $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$  ve  $|AB| \neq |AC|$  olsun. Ayrıca  $\widehat{BAC}$  açısının açı ortayı  $AD$  doğrusu ve  $AD$  doğrusuna  $A$  noktasında dik olan  $\epsilon$  doğrusunun  $BC$  ile kesiştiği nokta,  $|BE| = |AB| + |AC|$  şartını sağlayan  $E$  noktası olsun. Bu durumda  $ABC$  üçgeninin  $\widehat{ABC}$  ve  $\widehat{BCA}$  açılarını bulunuz.

**Çözüm.**  $|AB| \neq |AC|$  olduğundan, açı ortay  $AD$ ,  $BC$  doğrusuna dik olamaz yani,  $m(\widehat{DAB}) \neq 90^\circ$  olur ve dolayısıyla  $m(\widehat{xAD}) + m(\widehat{BDA}) \neq 180^\circ$  olduğu görülür. Bu nedenle  $x'Ax$  ve  $BC$  doğruları kesişir.

Bu durumda iki ayrı durum olasıdır:

- (a) Aşağıdaki şekilde de görülebileceği gibi  $m(\widehat{BDA}) \neq 90^\circ$ ,  $m(\widehat{xAD}) + m(\widehat{BDA}) \neq 180^\circ$  ve  $x'Ax$  ile  $BC$  doğruları  $BC$  doğrusunun  $B$  noktası tarafında bir  $E$  noktasında kesişmektedir.

Burada  $AB$  kenarının  $B$  noktası tarafına olan kısmında  $|AZ| = |AC|$  olacak şekilde bir  $Z$  noktası olsun. Bu durumda  $|BZ| = |AB| + |AC| = |BE|$  olur.

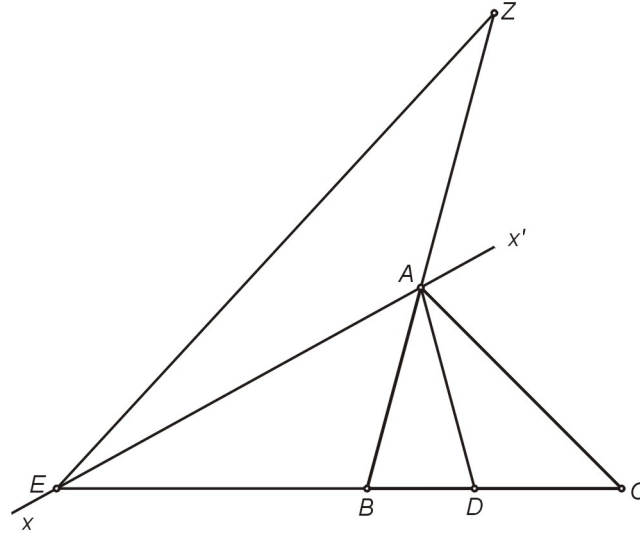
Dolayısıyla  $BEZ$  üçgeni bir ikizkenar üçgen ve

$$\omega = m(\widehat{BEZ}) = m(\widehat{BZE}) = \frac{m(\widehat{ABC})}{2}$$

olur.

Ayrıca  $AE$  kenarını ortak bulunduran  $EAC$  ve  $EAZ$  üçgenleri,  $|AC| = |AZ|$  ve  $m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{EAZ})$  olduğundan eş üçgenlerdir. Buradaki eşitlik

$$m(\widehat{EAC}) = 180^\circ - m(\widehat{CAx'}) = 180^\circ - m(\widehat{ZAx'}) = m(\widehat{EAZ})$$

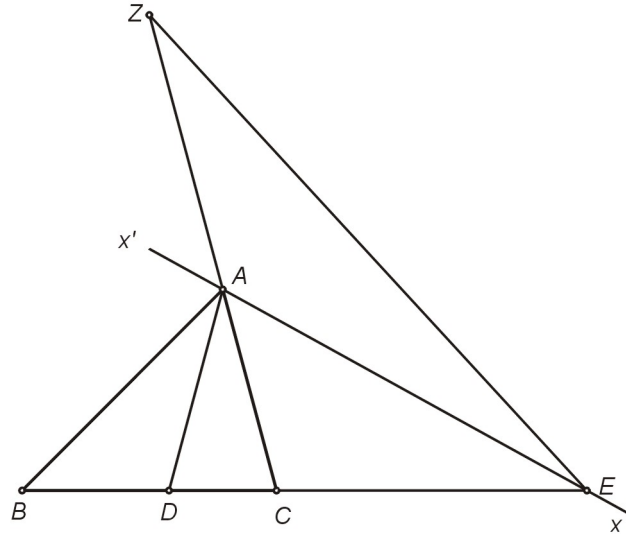


olmasından ve  $x'Ax \perp AD$  olduğundan  $x'Ax$  doğrusu  $CAZ$  açısının ve  $ZAC$  dış açısının açısı ortayı olmasından kaynaklanmaktadır.

Dolayısıyla  $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{AZE}) = \omega \Rightarrow 180^\circ - (m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAC})) = \omega \Rightarrow 180^\circ - (2\omega + 60^\circ) = \omega \Rightarrow \omega = 40^\circ$  olur ve buradan da  $m(\widehat{ABC}) = 2\omega = 80^\circ$  ve  $m(\widehat{BCA}) = 40^\circ$  değerleri bulunur.

- (b) Aşağıdaki şekilde de görülebileceği gibi  $m(\widehat{BDA}) > 90^\circ$  olduğunda,  $x'Ax$  ile  $BC$  doğruları  $BC$  doğrusunun  $C$  noktası tarafında bir  $E$  noktasında kesilmektedir. Burada  $AB$  doğrusunu  $A$  noktası tarafına doğru,  $|AZ| = |AC|$  olacak şekilde, bir  $Z$  noktasına kadar uzatalım. Bu durumda, (a) durumundaki gibi,  $BEZ$  üçgeni yine ikizkenar üçgen olur ve yukarıdakine benzer bir yöntemle  $m(\widehat{ABC}) = 20^\circ$  ve  $m(\widehat{BCA}) = 100^\circ$  değerleri bulunur.

113. Kenar uzunlukları 1, 2, 3 ve 4 birim olan bir dörtgenin alanının en büyük değeri nedir?



**Çözüm.** Şekilde gösterildiği kenar uzunlukları 1, 2, 3, 4 birim olan  $ABCD$  dışbükey dörtgeninde  $B$  ve  $D$  köşelerini birleştirelim ve  $|BD| = x$  diyelim. Dörtgeni  $(|AB|, |BC|, |CD|, |DA|) = (1, 2, 3, 4)$  şeklinde düşünmek yerine değişik kombinasyonlar da düşünebilirdik. Bu kombinasyonlardan,  $(1, 2, 3, 4) = (1, 4, 3, 2), (1, 2, 4, 3) = (1, 3, 4, 2)$  ve  $(1, 3, 2, 4) = (1, 4, 2, 3)$  olduğu açıktır. Aslında, kapattıkları bölgelerin alanları her üç durumda da eşittir. Çünkü, her hangi bir kombinasyonu, diğer kombinasyonlardan, karşılıklı köşeleri birleştirip oluşan üçgenlerin ortak olmayan kenarlarını yer değiştirmekle elde edebiliriz.

Biz, şekildeki durumu ele alıp, alanın en büyük değerini bulmaya çalışacağız. Heron formülünden, kenarları  $a, b, c$  br olan bir üçgenin alanının,  $s = (a + b + c)/2$  olmak üzere,

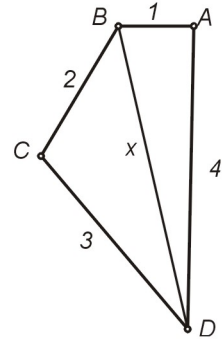
$$Alan = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$Alan(BCD) = \sqrt{(25-x^2)(x^2-1)}/4 \quad \text{ve} \quad Alan(ABD) = \sqrt{(25-x^2)(x^2-9)}/4$$

olarak elde edilir. Buradan,  $Alan(ABCD) = (\sqrt{(25-x^2)(x^2-1)} + \sqrt{(25-x^2)(x^2-9)})/4$  olur.  $u = x^2$  ve  $A = Alan(ABCD)$  diyelim.

$$4A = \sqrt{(25-u)(u-1)} + \sqrt{(25-u)(u-9)}$$



ifadesinin her tarafının  $u$  ya göre türevini alırsak,

$$4 \cdot \frac{dA}{du} = \frac{13-u}{\sqrt{(25-u)(u-1)}} + \frac{17-u}{\sqrt{(25-u)(u-9)}}$$

elde edilir.  $dA/du = 0$  ise  $(u-13)/\sqrt{u-1} = (17-u)/\sqrt{u-9}$  ve bu ifadenin karesi alınırsa  $(u-13)^2(u-9) = (17-u)^2(u-1)$  bulunur. Bu denklemden ifadeler açılırsa  $u^3 - 35u^2 + 403u - 1521 = u^3 - 35u^2 + 323u - 289$ , buradan da  $u = 15.4$  olur.

Dolayısıyla,  $4A = \sqrt{9.6}(\sqrt{14.4} + \sqrt{6.4}) = 8\sqrt{6}$  ve  $A = 2\sqrt{6}$  birim<sup>2</sup> olarak elde edilir.

**Brahmagupta formülünü kullanarak çözüm:** Kenar uzunlukları  $a, b, c, d$  br olan bir dış bükey dörtgenin alanı,  $s = (a + b + c + d)/2$  ve  $\alpha$  karşılıklı iki iç açının toplamının yarısı olmak üzere,  $Alan = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos \alpha}$  dir. Alanın en büyük değerinin  $\alpha = 90^\circ$  için elde edileceği açıktır. (Bu durumda karşılıklı açılar toplamı  $180^\circ$  olacağı için, dörtgenin aslında bir kirişler dörtgeni olduğuna dikkat ediniz.) Dolayısıyla kenar uzunlukları 1, 2, 3, 4 birim olan dörtgenin alanın en büyük değeri  $2\sqrt{6}$  birim<sup>2</sup> olarak elde edilir.

114.  $AB$  ve  $CD$  kenarları paralel olan bir  $ABCD$  yamuğunda  $m(\widehat{DAB}) = 6$  ve  $m(\widehat{ABC}) = 42$  dir.  $AB$  kenarında  $m(\widehat{AXD}) = 78$  ve  $m(\widehat{CXB}) = 66$  olacak şekilde bir  $X$  noktası bulunmaktadır.  $|AB|$  ve  $|CD|$  doğru parçaları arasındaki uzaklık 1 ise  $AD + DX - (BC + CX) = 8$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $D$  köşesinden  $AX$  kenarına bir dikme indirelim. Bu dikmenin uzunluğu 1 olur. Aynı şekilde  $C$  köşesinden de  $BX$  kenarına bir dikme indirelim. Bu dikmenin uzunluğu da 1 olacaktır. Buradan  $|AD| = \csc(6^\circ)$ ,  $|DX| = \csc(78^\circ)$ ,  $|BC| = \csc(42^\circ)$  ve  $|CX| = \csc(66^\circ)$  olarak yazılabilir. Yani  $AD + DX - (BC + CX) = \csc(6^\circ) + \csc(78^\circ) - \csc(42^\circ) - \csc(66^\circ)$  dir.  $x = 6^\circ, x = 78^\circ, x = -42^\circ, x = 30^\circ$  ve  $x = -66^\circ$  için  $\sin(5x) = \frac{1}{2}$ 'dir. De Moivre teoremi<sup>3</sup> kullanarak  $\sin(5x)$ 'i,  $\sin(x)$  cinsinden yazalım. De Moivre teoreminde  $n$  yerine 5 yazıp, eşitliğin sağ tarafını binom açılımını kullanarak açıp, karmaşık terimleri eşitlesek

$$\begin{aligned} \sin(5x) &= \sin^5(x) - 10\sin^3(x)\cos^2(x) + 5\sin(x)\cos^4(x) \\ &= \sin^5(x) - 10\sin^3(x)(1 - \sin^2(x)) + 5\sin(x)(1 - \sin^2(x))^2 \\ &= 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

<sup>3</sup>De Moivre teoremi:  $n$  bir tamsayı olmak üzere, herhangi bir  $x$  gerçel sayısı için

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$$

Cebirin temel teoremi kullanılarak, bu denklemin 5 kökü olduğu bulunur. Denklem de  $\sin(x)$  yerine  $s$  yazalım.

$$16s^5 - 20s^3 + 5s = \frac{1}{2} = 32s^5 - 40s^3 + 10s - 1 = 0 \quad (24)$$

$s = \frac{1}{2}$  (24) numaralı denklemin bir kökü olduğu için, (24)

$$(2s - 1)(16s^4 + 8s^3 - 16s^2 - 8s + 1 = 0) \quad (25)$$

olarak genişletilebilir. (25) numaralı denklemden elde edilen  $16s^4 + 8s^3 - 16s^2 - 8s + 1 = 0$  denkleminin kökleri  $\sin(6^\circ)$ ,  $\sin(78^\circ)$ ,  $\sin(-42^\circ)$  ve  $\sin(-66^\circ)$ 'dir. Bu denklemi  $s^4$  e bölüp, denklemde  $t = \frac{1}{s}$  yazarsak yeni denkleminiz

$$t^4 - 8t^3 - 16t^2 + 8t + 16 = 0$$

ve kökleri de  $\operatorname{cosec}(6^\circ)$ ,  $\operatorname{cosec}(78^\circ)$ ,  $\operatorname{cosec}(-42^\circ)$  ve  $\operatorname{cosec}(-66^\circ)$  olur.  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  cinsinden bir denklemde kökler toplamı  $-\frac{b}{a}$  olduğu için

$$\begin{aligned} & \operatorname{cosec}(6^\circ) + \operatorname{cosec}(78^\circ) + \operatorname{cosec}(-42^\circ) + \operatorname{cosec}(-66^\circ) \\ &= \operatorname{cosec}(6^\circ) + \operatorname{cosec}(78^\circ) - \operatorname{cosec}(42^\circ) - \operatorname{cosec}(66^\circ) \\ &= \frac{-(-8)}{1} = 8 \end{aligned}$$

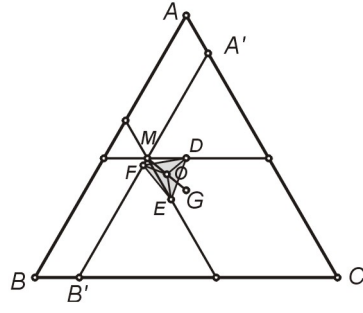
bulunur.

115. Bir  $ABC$  eşkenar üçgeni verilsin. Ağırlık merkezi  $G$  olsun.  $M$  noktası herhangi bir iç nokta olmak üzere,  $|MG|$  nin orta noktası  $O$  olsun.  $M$  noktasından geçen uç noktaları  $ABC$  üçgeninin kenarları üzerinde olan kenarlara paralel doğru parçaları çizilsin.

- a.  $O$  noktasının doğru parçalarının orta noktalarına uzaklıklarının eşit olduğunu gösteriniz.
- b. Doğru parçalarının orta noktalarının bir eşkenar üçgenin köşeleri olduğunu gösteriniz.

### Çözüm.

- a.  $D, E, F$  noktaları sırasıyla  $|BC|$ ,  $|CA|$ ,  $|AB|$  doğru parçalarına paralel doğru parçalarının orta noktaları olsun.  $|CF|$ ,  $|MF|$  ye paraleldir yani  $G$  noktasından geçer. Dolayısıyla  $GFM$  üçgeninin  $F$  açısı diktir ve  $|MG|$  hipotenüstür. Yani,  $|OF| = \frac{1}{2} |MG|$  dir. Benzer şekilde  $|OD| = |OE| = \frac{1}{2} |MG|$  dir.
- b.  $D, R, F, G, M$  noktaları  $O$  merkezli çember üzerindedirler. Simetriden dolayı,  $M$  noktasının  $m(\widehat{FGD})$  nin iç noktası olduğu kabul edilsin.  $m(\widehat{FOD}) = m(\widehat{FOM}) +$



$m(\widehat{MOD}) = 360^\circ - 2 \cdot m(\widehat{FMG}) - 2 \cdot m(\widehat{GMD}) = 360^\circ - 2 \cdot m(\widehat{FMD}) =$   
 $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$  bulunur. Ayrıca,  $m(\widehat{FOE}) = m(\widehat{FOG}) + m(\widehat{GOE}) = 2 \cdot$   
 $m(\widehat{OMF}) + 2 \cdot m(\widehat{OME}) = 2 \cdot m(\widehat{FME}) = 120^\circ$  dir. Yani,  $m(\widehat{EOD}) = 120^\circ$  dir.  
 Sonuç olarak  $D, E, F$  çemberi üç eşit yaya böler, yani  $DEF$  üçgeni eşkenardır.

## KAYNAKLAR

Bu kitaptaki problemler <http://www.qbyte.org/puzzles/p001s.html> adlı web sitesinden Genç Balkan matematik olimpiyatlarından ve Arnavutluk, Avusturya, Beyaz Rusya, Bulgaristan, Çek Cumhuriyeti, Çin, Estonya, Hırvatistan, İngiltere, İran, İrlanda, İtalya, Japonya, Kanada, Kore, Romanya, Rusya, Slovakya, Tayland, Vietnam ile Yunanistan’da düzenlenen ulusal matematik yarışmalarından alınmıştır.